

## 적응제어이론을 이용한 로봇트 매니플레이터 제어에 관한 연구

李 正 休\*    咸 雲 皙\*\*

A Study of Robot Manipulator Control by Using Adaptive Control Theory

Jeong hyu-Lee    Woon Chul-Ham

### 요 약 :

본 논문에서는 2개의 관절을 갖는 로봇트 매니플레이터의 동적방정식을 Lagrange-Euler 접근방식을 통하여 유도하고 이 방정식에 적응제어이론을 도입하여 로봇트 매니플레이터의 제어기를 설계하였다. 적응제어이론에 있어서 매개변수 추정방식은 Gradient 방식을 채택하였으며 샘플링 간격 0.1초로 하여 Runge-Kutta 방법을 이용하여 컴퓨터 시뮬레이션하였으며 제안된 제어기를 사용할 경우 정상상태의 오차가 1% 이내에서 동작함을 관찰하였다.

### Abstract

In this paper, dynamic equations of robot manipulator with two links are derived by using Lagrange-Euler formulation and controller of that robot manipulator is designed by using adaptive control theory.

Gradient method is adopted for parameter estimation in adaptive control.

In computer simulation, Runge-Kutta method is used with sampling interval being 0.1 second and it is observed that steady state error is within 1% under the suggested controller.

\* 군산대학교 공과대학 정보통신공학과 조교

\*\* 전북대학교 공과대학 전자공학과 부교수

## I. 서 론

1950년대, 항공기의 제어개선을 위하여 Gregory<sup>1)</sup>에 의하여 항공기 제어에 적용 제어이론이 최초로 소개되었다고 할 수 있다. 그러나 그 당시의 제어이론이 체계화되어 있지 않은 상태에 있었으므로 적용제어가 많은 학자들로 부터 흥미를 느끼게 할 만한 소재가 되지 못하였다.

그후 1960년대에 들어서면서 Luenberger<sup>2)3)</sup>에 의한 관측기 이론, Bellman에 의한 Dynamic Programming<sup>4)</sup>, Feldbaum<sup>5)6)</sup>에 의한 dual 제어이론, Astrom과 Eykhoff<sup>7)</sup>에 의한 시스템 식별 및 매개변수 추정방식등 제어분야에 있어서 많은 연구가 진행되었다.

이러한 수학적 기반과 LSI 분야의 혁신적인 진보에 힘입어 1970년대에 들어서면서 적용 제어이론을 재조명하여 보려는 시도가 활발히 진행되었다. 1980년대에는 적용제어에 있어서 강인성 문제<sup>8)9)</sup>를 분석하여 보려는 시도가 있었으며, 현재까지 적용제어에 있어서의 강인성 문제에 대한 분석은 매우 미진한 상태에 있다.

한편, 로봇트 매니플레이터의 제어기 설계에 관한 연구는 1980년대 초반이후 급격한 발전을 하여 왔다.

1955년 Denavit과 Hartenberg<sup>10)</sup>가 행렬을 이용하여 Kinematic 문제를 접근할 수 있는 새로운 방식을 창안 하였으며, 이 방식은 현재에도 로봇트 매니플레이터의 Kinematic 문제의 접근 방식으로 널리 사용되고 있다. 반면, 역 Kinematic 문제를 접근하는 방법으로는 행렬 algebra 접근방식, Iterative 접근방식 및 geometric 접근방식 등이 있다.

로봇트 매니플레이터의 Dynamic 문제에 관하여서는 Lagrange-Euler (L-E), Recursive-Lagrange(R-L), Newton-Euler(N-E), 그리고 Generalized D'Alembert라 불리우는 네가지 접근방식이 있다.

L-E에 관하여서는 Uicker<sup>11)</sup>, Kahn<sup>12)</sup>, Paul<sup>13)</sup>, Bejczy<sup>14)</sup>, Lewis<sup>15)</sup>, Lee<sup>16)</sup> 등이 rigid-body 로보트 매니플레이터에 대하여 연구하였으며, 이 방식의 장점은 로보트 Dynamic식이 매우 간단히 유도된다는 점이며, 단점으로는 Dynamics를 유도하기까지 계산량이 많다는 점을 들 수 있다. N-E에 대하여서는 Luh 등이 연구하였으며 Dynamic식 유도과정은 순방향과 역방향으로 진행되는 순환방정식들로 구성되며 다소 복잡한 면이 단점으로 지적되나 계산속도나 정밀도면에서 우수하다는 장점을 갖고 있다.

Hollerbach<sup>17)</sup>는 L-E에 N-E의 유도과정에서 나타나는 순환적인 개념을 도입하여 새로운 R-L 접근방식을 창안하였으며 Lee<sup>18)</sup> 등은 제어를 위한 목적으로 Generalized d'Alembart principle에 근거하여 Generalized d'Alembart 접근방식을 소개하였다.

실제로 3차원 공간내에서 인간의 팔이 할 수 있는 정도의 작업을 수행하기 위한 로봇트 매니플레이터는 6개 이상의 자유도를 갖고 있어야 한다.

본 연구에서는 일차적으로 2개의 관절을 갖으며 각 link는  $m_1, m_2$ 인 point mass로 가상된 로봇트 매니플레이터에 관하여 그 Dynamic을 L-E에 의거하여 유도하였다. 유도한 Dynamic 식은 Colirios 힘 등에 의하여 비선형 2차 미분 방정식으로 표현되어 있으며, 따라서 기존제어 알고리즘을 도입하여 제어기 설계를 하는 것은 매우 어려운 과제가 된다. 따라서 앞에서 언급한 적용제어 이론 가운데 비교적 그 내용이 간단한 간접적용제어방식을 이용하여 제어기 설계를 하였으며 아울러 설계된 제어기를 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 분석하여 보았다.

컴퓨터 수행결과 sampling interval을 0.1초로 하였을 경우 초기 약 1초간의 과도상태를 거쳐 0.1% 오차내에 원하는 각도내에 수렴함을 알 수 있었다.

## II. 로봇 Dynamics

### 2.1 N개의 관절을 갖는 로봇 매니플레이터.

일반적으로 N개의 자유도를 갖는 로봇 매니플레이터의 Dynamics는 일반화된 좌표계에서 Newton의 제 2법칙을 적용하여 유도하며 다음과 같은 Lagrange-Euler 식으로 표현된다.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

여기서 위 식의 각 항에 대한 정의는 다음과 같다.

L : Lagrange 함수 = K - P

K : 로봇 매니플레이터의 전체 운동에너지

P : 로봇 매니플레이터의 전체 포텐셜 에너지

$q_i$  : 로봇 매니플레이터에 대한 i번째 관절에 대하여 일반화된 (generalized) 좌표변수

$\dot{q}_i$  :  $q_i$  에 대한 시간적 미분항

$\tau_i$  : i번째 관절에 인가되는 일반화된 힘

위 식에서 각 관절이 각 관절이 각 운동을 할 경우,  $q_i$ 와  $\tau_i$ 는 관절 부위의 각도와 torque를 나타낸다. 위 식에서 알 수 있듯이 로봇 매니플레이터의 Dynamics는 비선형 2차 미분방정식으로 나타나며 따라서 기존의 제어 알고리즘을 이용하여 제어하에는 매우 어렵다는 사실을 알 수 있다.

### 2.2 2개의 link를 갖는 로봇 매니플레이터

본 절에서는 2개의 link를 갖는 로봇 매니플레이터의 Dynamics에 대하여 L-E방식에 의하여 유도하여 본다. 아래 그림과 같은 자유도 2인 로봇 매니플레이터에서 각각의 joint 변수를  $\theta_1, \theta_2$ 로 정의하며 각각의 link의 질량을  $m_1, m_2$ 로 설정할 경우 각각의 link 매개변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \quad \dots\dots\dots (2) \\ d_1 &= 0 \\ d_2 &= 0 \\ a_1 &= r_1 \quad \dots\dots\dots (2) \\ a_2 &= r_2 \end{aligned}$$

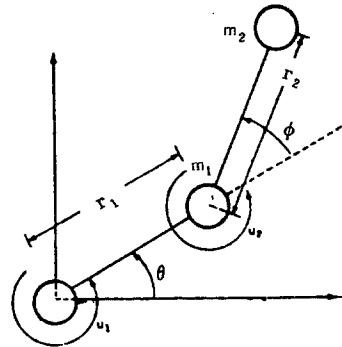


그림 1. 2 관절 로봇 매니플레이터  
Fig. 1. A two link robot manipulator.

앞 절에서 소개된 Lagrange-Euler 식에 Denavit과 Hartenberg가 제안한 행렬을 이용하여 Dynamics를 분석하기로 하며, 이 경우 변환 행렬들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}^0A_1 &= \begin{pmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & r_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & r_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ {}^1A_2 &= \begin{pmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & r_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & r_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (3) \\ {}^0A_2 &= {}^0A_1 {}^1A_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & r_2 C_{12} + r_1 C_1 \\ S_{12} & C_{12} & 0 & r_2 S_{12} + r_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots (4)$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix} \dots (9)$$

$$Q_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2 \dots (5)$$

각 가속도와 관련된 행렬을 구성하는 각 요소를  $D_{ij}$ 로 놓을 경우 다음과 같이 표현된다.

$$D_{11} = \text{Tr}(U_{11} J_1 U_{11}^t) + \text{Tr}(U_{21} J_2 U_{21}^t) \\ = m_1 r_1^2 + m_2 r_1^2 + m_2 r_2^2 + 2r_1 m_2 C_2 \dots (10)$$

$$U_{11} = Q_1^0 A_1 = \begin{pmatrix} -S_1 & -C_1 & 0 & -r_1 S_1 \\ C_1 & -S_1 & 0 & r_1 C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots (6)$$

$$D_{12} = D_{21} = \text{Tr}(U_{22} J_2 U_{21}^t) \\ = m_2 r_2^2 + m_2 r_1 r_2 C_2 \dots (11)$$

$$U_{21} = Q_1^0 A_2 =$$

$$\begin{pmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -r_2 S_{12} - r_1 S_1 \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & r_2 C_{12} + r_1 C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots (7)$$

$$D_{22} = \text{Tr}(U_{22} J_2 U_{22}^t) \\ = m_2 r_2^2 \dots (12)$$

Coriolis와 구심력을 나타내는 항을  $h_1, h_2$ 로 놓을 경우 다음과 같은 과정에서 구할 수 있다.

$$U_{22} = {}^0 A_1 Q_2^1 A_2 =$$

$$\begin{pmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -r_2 S_{12} \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & r_2 C_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots (8)$$

$$h_{111} = \text{Tr}(U_{111} J_1 U_{11}^t) + \text{tr}(U_{211} J_2 U_{21}^t) \\ = 0 \dots (13)$$

$$h_{112} = \text{Tr}(U_{212} J_2 U_{21}^t) \\ = -m_2 r_1 r_2 S_2 \dots (14)$$

$$h_{121} = \text{Tr}(U_{221} J_2 U_{21}^t) \\ = -m_2 r_1 r_2 S_2 \dots (15)$$

$$h_{122} = \text{Tr}(U_{222} J_2 U_{21}^t) \\ = -m_2 r_1 r_2 S_2 \dots (16)$$

$$h_{211} = \text{Tr}(U_{211} J_2 U_{22}^t) \\ = m_2 r_1 r_2 S_2 \dots (17)$$

$$h_{212} = \text{Tr}(U_{212} J_2 U_{22}^t)$$

또한, pseudo-inertia 행렬  $J_1, J_2$ 는 다음과 같다.

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 \end{pmatrix}$$

$$= 0 \dots\dots\dots (18)$$

$$h_{221} = \text{Tr}(U_{221} J_2 U_{22}^t) \\ = 0 \dots\dots\dots (19)$$

$$h_{222} = \text{Tr}(U_{222} J_2 U_{22}^t) \\ = 0 \dots\dots\dots (20)$$

$$h_1 = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^2 h_{1km} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_m = h_{111} \dot{\theta}_1^2 \\ + h_{112} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + h_{121} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ + h_{122} \dot{\theta}_2^2 \\ = -2m_2 r_1 r_2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ - m_2 r_1 r_2 S_2 \dot{\theta}_2^2 \dots\dots\dots (21)$$

$$h_2 = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^2 h_{2km} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_m = h_{211} \dot{\theta}_1^2 \\ + h_{212} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ + h_{221} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + h_{222} \dot{\theta}_2^2 \\ = m_2 r_1 r_2 S_2 \dot{\theta}_1^2 \dots\dots\dots (22)$$

중력에 관한 항을  $c_1, c_2$ 로 놓을 경우, 다음과 같은 과정에 의하여 구할 수 있다.

$${}^1r_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 1], \quad {}^2r_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \dots (23)$$

$$c_1 = -m_1 g U_{11}^{-1} r_1 + -m_2 g U_{21}^{-2} r_1 \\ = m_1 g r_1 C_1 + m_2 g (r_2 C_{12} + r_1 C_1) \\ = (m_1 + m_2) g r_1 C_1 + m_2 g r_2 C_{12} \dots (24)$$

$$c_2 = -m_2 g U_{22}^{-2} r_2 \\ = m_2 g r_2 C_{12} \dots\dots\dots (25)$$

위에서 구한 각종 변수들을 통하여 다음과 같은 동적방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

단,  $\tau_1, \tau_2$ 는 각 관절에 인가되는 Torque이며,  $f_1, f_2$ 는 마찰에 의한 항으로 다음과 같다.

$$f_1 = \nu_1 \dot{\theta}_1 \dots\dots\dots (27)$$

$$f_2 = \nu_2 \dot{\theta}_2 \dots\dots\dots (28)$$

### III. 적용제어이론

본 장에서는 2장에서 구한 동적방정식 (26)에 근거하여 각 관절을 원하는 각도  $\theta_{d1}, \theta_{d2}$  만큼 움직이게 하는 로봇트 매니플레이터 제어를 적용제어이론에 근거하여 설계한다. 동적방정식 (26)을 샘플링할 경우 다음과 같은 이산시스템으로 모델링할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{111} & a_{112} \\ a_{121} & a_{122} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} a_{211} & a_{212} \\ a_{221} & a_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t-1) \\ y_2(t-1) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} b_{111} & b_{112} \\ b_{121} & b_{122} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} b_{211} & b_{212} \\ b_{221} & b_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t-1) \\ u_2(t-1) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

단, 여기서  $y_1(t), y_2(t)$ 는  $t$ 순간의 로봇트 매니플레이터의 각 관절에서의 각도이며,  $u_1(t), u_2(t)$ 는 각 관절에 인가되는 torque이다.

또한,  $n_1(t), n_2(t)$ 는 각 관절에 발생되는 출력 잡음이다.

다음과 같이  $\varphi(t)$ 와  $\omega_1(t), \omega_2(t)$ 를 정의한다.

$$\varphi(t) = [y_1(t), y_2(t), y_1(t-1), y_2(t-1), u_1(t), u_2(t), u_1(t-1), u_2(t-1)]$$

$$\omega_1 = [a_{111}, a_{112}, a_{211}, a_{212}, b_{111}, b_{112}, b_{211}, b_{222}]$$

$$\omega_2 = [a_{121}, a_{122}, a_{221}, a_{222}, b_{121}, b_{122}, b_{221}, b_{222}] \dots \dots \dots (30)$$

위와 같이 정의된 매개변수를 이용하여 식 (29) 를 다시 표현하며 다음과 같다.

$$y_1(t+1) = \omega_1^t \varphi(t) + n_1(t+1) \dots \dots \dots (31)$$

$$y_2(t+1) = \omega_2^t \varphi(t) + n_2(t+1) \dots \dots \dots (32)$$

다음과 같이 추종오차  $\epsilon_1(t), \epsilon_2(t)$ 를 정의한다.

$$\epsilon_1(t) = y_{d1}(t) - y_1(t) \dots \dots \dots (33)$$

$$\epsilon_2(t) = y_{d2}(t) - y_2(t) \dots \dots \dots (34)$$

단, 여기서  $y_{d1}(t)$ 과  $y_{d2}(t)$ 는 출력이 쫓고자 하는 기준 출력이다.

$n_1(t), n_2(t)$ 의 상한치  $\delta_1, \delta_2$ 는 다음과 같이 정의하며 그 크기를 알고 있다고 한다.

$$\delta_1 = \sup_t |n_1(t)|, \delta_2 = \sup_t |n_2(t)| \dots \dots (35)$$

제어의 목적은  $t$ 가 무한히 증가함에 따라  $y_1(t), y_2(t)$ 가 원하는 기준출력  $y_{d1}$ 과  $y_{d2}$ 에 가급적 가까이 수렴되도록 하는데 있으며 다음과 같이 수식으로 표현될 수 있다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\epsilon_1(t)| \leq \delta_1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\epsilon_2(t)| \leq \delta_2 \dots \dots \dots (36)$$

현재  $\omega_1$ 과  $\omega_2$ 가 시변은 물론 미지인 관계로 각각에 대한 추정치를  $\omega_1(t)$ 과  $\omega_2(t)$ 로 추정하고 이 추정된 값을 이용하여 다음과 같은 제어기를 설계한다.

$$y_{d1}(t) = \varphi(t)^t \omega_1(t),$$

$$y_{d2}(t) = \varphi(t)^t \omega_2(t) \dots \dots \dots (37)$$

다음과 같이 사전추정오차  $e_1(t/t-1), e_2(t/t-1)$ 과 사후추정오차  $e_1(t/t), e_2(t/t)$ 를 정의한다.

$$e_i(t/t-1) = y_i(t) - \varphi(t-1)^t \omega_i(t-1) \quad i = 1, 2 \dots \dots \dots (38)$$

$$e_i(t/t) = y_i(t) - \varphi(t-1)^t \omega_i(t) \quad i = 1, 2 \dots \dots \dots (39)$$

매개변수  $\omega_1, \omega_2$ 에 대한 추정치  $\omega_1(t), \omega_2(t)$ 는 다음과 같은 사구간을 이용하여 적용하여 나가며 일반적으로 사구간을 이용한 프로젝션 알고리즘이라 부른다. 단, 여기서  $\epsilon$ 은  $\delta_i$ 에 의하여 좌우되며 그 크기가 가급적 0 부근인 양의 상수로 설정한다.

$$\omega_i(t) = \omega_i(t-1)$$

$$+ \frac{a(t)\varphi(t-1) f_i(e_i(t))}{\|\varphi(t-1)\|^2} \quad (40-a)$$

$$f_i(e) = \begin{cases} e - \delta_i + \epsilon & \text{만일 } e > \delta \\ 0 & \text{만일 } |e| < \delta \\ e + \delta_i - \epsilon & \text{만일 } e < -\delta \end{cases} \quad (40-a)$$

$$0 < a(t) < 2, \quad i = 1, 2$$

또한 매개변수 추정알고리즘 가운데 하나인 Least Square 방식에 사구간을 이용한 방식으로 매개변수를 추정할 수도 있겠지만 본 논문에서는 지면 관계상 프로젝션 알고리즘에 대하여서만 국한하여 살펴보기로 한다.

### IV. 안정도 분석 및 신호의 유한성

본 절에서는 식 (37) 과 식 (40) 으로 구성된 제어 알고리즘의 안정도 및 시스템의 모든 신호들에 대한 유한성을 분석하기로 한다.

사구간의 특성을 나타낸 식 (40) 으로 부터 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} & (e_i(t/t-1)) - n_i(t) f_i(e_i(t/t-1)) \\ & > f_i(e_i(t/t-1))^2 \\ & i = 1, 2 \dots \dots \dots (41) \end{aligned}$$

위 식에 근거하여 본 논문의 안정도 분석에 중요한 역할을 하는 정리를 살펴본다.

정리 3.1

식 (29) 으로 주어진 공정의 역함수가 안정하다는 가정하에서 식 (37) 과 식 (40) 으로 구성된 제어 알고리즘을 적용할 경우 다음과 같은 식이 만족된다.

i)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_i(e_i(t/t-1))}{\|\varphi(t-1)\|} = 0 \quad i = 1, 2$

ii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_i(e_i(t/t))}{\|\varphi(t-1)\|} = 0 \quad i = 1, 2$

iii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\omega_i(t) - \omega_i(t-1)\| = 0 \quad i = 1, 2$

증명.

다음과 같이 매개변수 추정오차  $\tilde{\omega}_i(t)$  를 정의한다.

$$\tilde{\omega}_i(t) = \omega_i - \omega_i(t) \quad i = 1, 2 \dots \dots (42)$$

식 (40) 에 의하여 다음식이 만족된다.

$$\begin{aligned} \|\tilde{\omega}_i(t)\|^2 &= \|\tilde{\omega}_i(t-1)\|^2 \\ & - \frac{2a(t)\varphi(t-1)^t \tilde{\omega}_i(t-1) f_i(e_i(t/t-1))}{\|\varphi(t-1)\|^2} \end{aligned}$$

$$+ \frac{a(t)^2 f_i(e_i(t/t-1))^2}{\|\varphi(t-1)\|^2} \quad i = 1, 2 \dots (43)$$

식 (38) 과 식 (41) 을 위 식에 적용하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \|\tilde{\omega}_i(t)\|^2 &= \|\tilde{\omega}_i(t-1)\|^2 \\ & - \frac{2a(t)(e_i(t/t-1) - n_i(t) f_i(e_i(t/t-1)))}{\|\varphi(t-1)\|^2} \\ & + \frac{a(t)^2 f_i(e_i(t/t-1))^2}{\|\varphi(t-1)\|^2} \\ & \leq \|\tilde{\omega}_i(t-1)\|^2 \\ & - \frac{a(t)[2 - a(t)] f_i(e_i(t/t-1))^2}{\|\varphi(t-1)\|^2} \dots (44) \end{aligned}$$

$i = 1, 2$

$0 < a(t) < 2$  이므로 수열  $\{\|\tilde{\omega}_i(t)\|\}$  는 비증가 (nonincreasing) 수열이며 다음과 같은 식을 만족한다.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\omega}_i(t) - \tilde{\omega}_i(t-1)\| &= 0 \dots \dots \dots (45) \\ i &= 1, 2 \end{aligned}$$

또한 식 (44) 로 부터 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} -\infty &< \|\tilde{\omega}_i(\infty)\|^2 - \|\tilde{\omega}_i(0)\|^2 \\ &< -\sum_{t=0}^{\infty} \frac{f_i(e_i(t/t-1))^2}{\|\varphi(t-1)\|^2} < 0 \dots \dots \dots (46) \end{aligned}$$

$i = 1, 2$

따라서 수열  $\{\frac{f_i(e_i(t/t-1))}{\|\varphi(t-1)\|}\}$  은  $l^2$  에 속함을 알 수 있으며 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_i(e_i(t/t-1))}{\|\varphi(t-1)\|} = 0 \quad \dots\dots\dots (47)$$

$$i = 1, 2$$

또한 식 (40) 에 의하여  $e_i(t/t)$  와  $e_i(t/t-1)$  사이에 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\frac{e_i(t/t)}{\|\varphi(t-1)\|^2} = \frac{e_i(t/t-1)}{\|\varphi(t-1)\|^2} - \frac{a(t)f_i(e_i(t/t-1))}{\|\varphi(t-1)\|^2} \quad (48)$$

$$i = 1, 2$$

위 식에 식 (47) 을 대입하면 다음 식이 성립하며

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e_i(t/t)}{\|\varphi(t-1)\|^2} \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e_i(t/t-1)}{\|\varphi(t-1)\|^2} \quad \dots\dots\dots (49) \\ i = 1, 2 \end{aligned}$$

따라서 식 (49) 로 부터 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_i(e_i(t/t))}{\|\varphi(t-1)\|} = 0 \quad i = 1, 2 \quad \dots\dots (50)$$

증명끝.

정리 3.1 이 성립한다고 하여 공정의 입·출력 수열  $\{u_i(t)\}$ ,  $\{y_i(t)\}$  가 유한한 것은 아니며, 따라서 입·출력 수열  $\{u_i(t)\}$ ,  $\{y_i(t)\}$  의 원소로 구성된 수열  $\{\|\varphi(t)\|\}$  의 유한함을 입증하여야만 제시한 제어 알고리즘이 총체적으로 안정하다는 사실을 증명한 것이 된다. 따라서 본 절에서는  $\varphi(t-1)$  가 유한함을 B.B. Peterson 과 K.S.Narendra<sup>8)</sup> 가 시연속 시스템에서 다루었던 방식과 유사한 방법을 사용하여 증명하기로

한다. 먼저 다음과 같은  $\Omega_1$  과  $\Omega_2$  를 정의한다.

$$\Omega_1 = \{t \mid |e_i(t/t-1)| < \delta_i\}$$

$$\Omega_2 = \{t \mid |e_i(t/t-1)| > \delta_i\} \quad \dots (51)$$

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = Z^+ \quad i = 1, 2$$

다음과 같이 세가지 경우로 나누어  $\varphi(t-1)$  의 유한함을 증명한다.

경우 1 ]

유한한 시각  $t_1$  이 존재하여  $t_1$  이후의 모든  $t$  에 대하여  $t \in \Omega_1$  인 경우

이 경우 모든  $t \in \Omega_1$  에 대하여  $|e_i(t/t-1)| < \delta_i$  이므로 다음식이 성립한다.

$$\begin{aligned} |y_i(t) - \omega_i(t-1)^T \varphi(t-1)| \\ = |y_i(t) - y_{di}(t) \\ + (\omega_i(t) - \omega_i(t-1))^T \varphi(t-1)| < \delta_i \quad \dots (52) \\ i = 1, 2 \end{aligned}$$

그런데  $t \in \Omega_1$  에 대하여  $\omega_i(t) = \omega_i(t-1)$  이므로 다음 식이 성립한다.

$$|y_i(t) - y_{di}(t)| < \delta_i \quad i = 1, 2 \quad \dots\dots (53)$$

따라서  $|y_i(t)| - |y_{di}(t)| < \delta_i$  이며 다음식이 성립한다.

$$|y_i(t)| < \delta_i + |y_{di}(t)| < \delta_i + M_i \quad \dots (54)$$

단, 여기서  $M_i = \sup_t |y_{di}(t)|$  이다.

위 식으로부터  $|y_i(t)|$  가 유한함을 알 수 있으며, 또한 공정의 역함수가 안정하므로 아래와 같은 식으로부터  $|u_i(t)|$  또한 유한하며 따라서  $\|\varphi(t-1)\|$  가 유한함을 알 수 있다.

$$|u_i(t-1)| = C_1 + C_2 \sup_{\tau < t} |y_i(\tau)| \quad (55)$$



단,  $0 < C_1 < \infty, 0 < C_2 < \infty$

경우 2 ]

유한한 시각  $t_2$ 가 존재하며 모든  $t > t_2$ 에 대하여  $t \in \Omega_1$ 인 경우

정리 3.1의 (ii)로 부터 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_i(e_i(t/t))}{\|\varphi(t-1)\|} = 0 \dots\dots\dots (56)$$

$t \in \Omega_2, i = 1, 2$

따라서  $|f_i(e_i(t/t))| = 0[\sup_{\tau < t} \|\varphi(\tau-1)\|]$ 이며  $t \in \Omega_2$ 인 경우를 다루고 있는 관계로 다음 식이 성립한다.

$$|y_i(t) - y_{di}(t)| = 0[\sup_{\tau < t} \|\varphi(\tau-1)\|] \dots (57)$$

$$|y_i(t)| = M_1 + 0[\sup_{\tau < t} \|\varphi(\tau-1)\|] \dots (58)$$

단,  $\tau, t \in \Omega_2, i = 1, 2$

또한 공정의 역함수가 안정하므로  $y_i(t)$ 와  $u_i(t)$ 로 구성된  $\varphi(t)$ 는 다음과 같은 식을 만족한다.

$$\|\varphi(t)\| \leq M + 0[\sup_{\tau < t} \|\varphi(\tau-1)\|] \dots (59)$$

단,  $\tau, t \in \Omega_2$

$$M = \max(M_1, M_2)$$

따라서  $\|\varphi(t)\|$ 은 유한하다.

경우 3 ]

경우 1), 2]의 경우 모든 신호가 유한함을 입증했으며 따라서 불안정한 특성은  $e_i(t/t)$ 가  $\Omega_1$ 과  $\Omega_2$ 에 교대로 나타나는 경우에 가능하며 이 경우에 대하여 고찰하여 본다.

즉  $\mu(\Omega_1) = \infty, \mu(\Omega_2) = \infty$ 인 경우, 단 여기서  $\mu(\Omega)$ 는 자연수의 부분집합  $\Omega$ 의 원소갯수를 나타낸다.

이 경우 정리 3.1의 ii)에 의거하여

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_i(e_i(t/t))}{\|\varphi(t-1)\|} = 0 \quad i = 1, 2$$

이며 이를 달리 표현하며 다음과 같다.

$$|f_i(e_i(t/t))| = \begin{cases} 0[\sup_{\tau < t} \|\varphi(\tau-1)\|], & t \in \Omega_2 \dots\dots (60) \\ 0 & t \in \Omega_1, i = 1, 2 \end{cases}$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$|f_i(y(t) - y_{di}(t))| = \begin{cases} 0[\sup_{\tau < t} \|\varphi(\tau-1)\|], & t \in \Omega_2 \dots\dots (61) \\ 0 & t \in \Omega_1, i = 1, 2 \end{cases}$$

또한 위 식으로 부터 다음 식이 성립한다.

$$|y_i(t) - y_{di}(t)| \leq \delta_i, t \in \Omega_1 \dots\dots\dots (62)$$

$$|y_i(t) - y_{di}(t)| = 0[\sup_{\tau < t} \|\varphi(\tau-1)\|], \quad t \in \Omega_2 \quad (63)$$

$i = 1, 2$

따라서  $t \in \Omega_1$ 의 경우는  $y_i(t)$ 가 유한함을 알 수 있으며 또한 공정의 역함수가 안정하다는 가정하에서  $y_i(t)$ 가 유한하다는 사실로부터  $u_i(t)$ 가 유한함을 알 수 있으며 따라서,  $\varphi(t)$ 가 유한하다.  $t \in \Omega_2$ 의 경우는 식 (59)에 의거하여 경우 2]에서와 마찬가지로 다음 식이 성립한다.

$$\|\varphi(t)\| \leq M + 0[\sup_{\tau < t} \|\varphi(\tau-1)\|] \dots (64)$$

단,  $\tau, t \in \Omega_2$

따라서  $\varphi(t)$ 가 유한하다. 이상에서 살펴본 바와 같이 본 논문에서 제안한 제어 알고리즘을 사용할 경우 기

준입력이 유한할 경우 시스템의 모든 신호가 유한함을 살펴 보았으며 위의 분석을 통하여 다음과 같은 보조 정리가 만족함을 알 수 있다.

$$f_i'(e) = \begin{cases} e & \text{만일 } e > 2\delta_i \\ 0 & \text{만일 } |e| < 2\delta_i \\ -e & \text{만일 } e < -2\delta_i \end{cases} \quad (66-b)$$

$$0 < a(t) < 2 \quad i = 1, 2$$

보조정리 3.1

식 (29)로 주어진 공정의 역함수가 안정하다는 가정 하에서 식 (37)과 식 (40)으로 구성된 제어 알고리즘을 적용할 경우  $\epsilon$ 을 0보다 크게 설정할 경우  $\mu(\Omega_2)$ 는 유한하다.

증명.

먼저  $\mu(\Omega_2)$ 가 무한하다고 가정한다. 매개변수 적용법칙을 나타내는 식 (40)에 의하여 다음과 같은 식을 만족하는 임의의 작은 양의 상수  $\epsilon$ 이 존재한다.

$$|f_i(e_i(t/t))| \geq \epsilon, \quad t \in \Omega_2 \quad i = 1, 2 \quad (65)$$

또한 위에서 살펴본 바와 같이  $\varphi(t)$ 가 유한하며 이러한 사실을 식 (46)에 적용할 경우 식 (46)의 부등식 맨 오른쪽항의 값이  $-\infty$ 가 되면 이러한 사실은  $\omega_i(0)$  유한하며  $\|\omega_i(t)\|$ 가 비증가함수이다는 사실을 감안할 경우 모순이 발생된다. 따라서 처음의 가정이 잘못되었으므로  $\mu(\Omega_2)$ 는 유한하다.

증명끝.

이상에서 살펴보았듯이 식 (37)과 식 (40)으로 구성된 제어 알고리즘이 총체적으로 안정함을 알 수 있으며 위의 분석을 토대로 식 (40)과 더불어 많이 사용되는 다음과 같은 사구간 방식을 제안하며 이에 안정도 분석을 다루기로 한다.

$$\omega_i(t) = \omega_i(t-1) + \frac{a(t)\varphi(t-1)f_i'(e_i(t/t-1))}{\|\varphi(t-1)\|^2} \quad (66-a)$$

위와 같은 사구간 방식을 적용할 경우 다음과 같은 정리가 만족된다.

정리 3.2

식 (29)으로 주어진 공정의 역함수가 안정하다는 가정 하에서 식 (37)과 식 (66)으로 구성된 제어 알고리즘을 적용할 경우 다음과 같은 식이 만족된다.

$$i) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_i'(e_i(t/t-1))}{\|\varphi(t-1)\|} = 0 \quad i = 1, 2$$

$$ii) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_i'(e_i(t/t))}{\|\varphi(t-1)\|} = 0 \quad i = 1, 2$$

$$iii) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\omega_i(t) - \omega_i(t-1)\| = 0 \quad i = 1, 2$$

증명.

사구간 특성을 나타낸 식 (66)으로 부터 다음과 같은 식이 성립하며 이 식은 본 정리를 증명하는데 중요한 역할을 한다.

$$2(e_i(t/t-1) - n_i(t))f_i'(e_i(t/t-1)) \geq f_i'(e_i(t/t-1))^2 \quad i = 1, 2 \quad \dots\dots\dots (67)$$

이하의 증명은 정리 3.1과 유사한 관계로 생략한다.

증명끝.

식 (66)의 사구간 방식에서 주목할 사항은 이러한 사구간 방식이 총체적으로 안정화하기 위하여서는 사구간의 크기가 식 (40)의 사구간 방식에 의하여 약 2배 정도로 크다는 사실이며 이러한 점이 식 (40)의 사구간 방식에 비하여 단점으로 지적될 수 있다.

### V. 컴퓨터 시뮬레이션

본 장에서는 2장에서 다룬 2개의 관절을 갖는 로봇 매니플레이터의 Dynamics에 3장에서 다룬 적용제어 이론을 이용하여 설계된 제어기의 동작특성을 살펴보기 위하여 IBM/AT를 이용하여 컴퓨터 시뮬레이션을 수행한다. 로봇 매니플레이터의 제어기는 샘플링 간격을 0.1초로한 이산적용제어기로 설계하였으며 제어기의 출력, 즉 로봇 매니플레이터의 각 관절에 공급되는 torque와 각 관절의 각도사이의 관계를 나타내는 식 (26)은 시연속 시스템 그대로 놓고 수치해석 가운데 비선형 미분방정식을 다룬 Runge-Kutta 방식을 적용하여 시뮬레이션 하였다.

시뮬레이션에서 다룬 로봇 매니플레이터의 각종 파라메타는 표 1과 같다.

표 1. 로봇 매니플레이터의 각종파라메타 수치

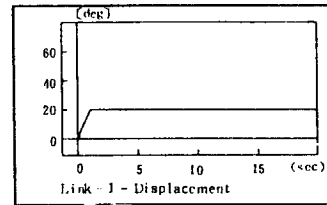
파라메타	수 치	단 위
$m_1$	10	kg
$m_2$	5	kg
$r_1$	1.0	m
$r_2$	0.8	m
$v_1$	20	N-m-sec/rad
$v_2$	10	N-m-sec/rad
$g$	9.8	m / sec <sup>2</sup>

표 1과 같은 파라메타를 사용하여 3장에서 다룬 적용제어이론을 이용한 각 관절의 각도  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  및 각속도  $\dot{\theta}_1(t)$ ,  $\dot{\theta}_2(t)$ 와 torque  $\tau_1(t)$ ,  $\tau_2(t)$ 의 파형이 그림 2, 그림 3에 나타나 있다. 단, 움직이고자 하는 관절의 각도  $\theta_{d1}$ ,  $\theta_{d2}$ 는 각각  $20^\circ$ ,  $10^\circ$ 로 설정하였으며 적용제어기의 초기파라메타  $\omega_1(0)$ ,  $\omega_2(0)$ 는 각각 다음과 같이 초기화 하였다.

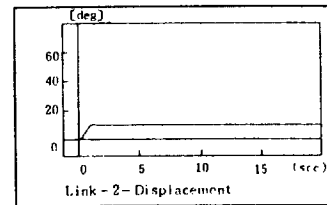
$$\omega_1(0) = [ 1.7, 0.11, -0.81, -0.09, 0.45, -0.92, 0.37, -0.66 ]$$

$$\omega_2(0) = [ 0.38, 1.70, -0.34, -0.83, -1.0, 3.80, -0.71, 2.70 ]$$

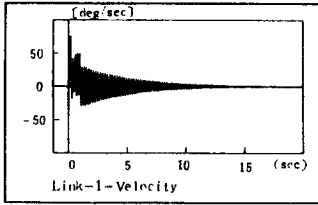
또한, torque  $\tau_1(t)$ 의 상한치와 하한치는 각각 500 N-m, -500 N-m로 하였다.사구간  $\delta_1, \delta_2$ 는 모두 0으로 하였으며 그림에서 보듯이 약 1초 정도의 과도상태를 거쳐서 원하는 각도에 잘 수렴함을 알수 있었으며 정상상태의 오차는 약 0.1%정도 발생함을 알수 있었다. 따라서, 적용제어 이론을 통하여, 제어기를 설계할 경우, 본 절의 시뮬레이션에서 알 수 있듯이 로봇 매니플레이터를 이산시스템으로 선형화할 때 발생하는 오차를 잡음으로 간주할 경우 이에 대한 고려가 전혀 없이도 제어가 원만히 이루어짐을 알 수 있다.



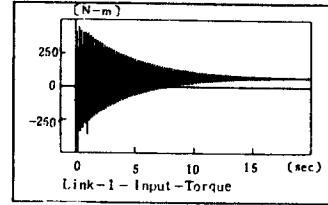
F 2(a)



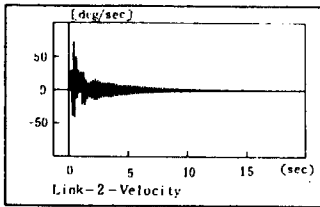
F 2(b)



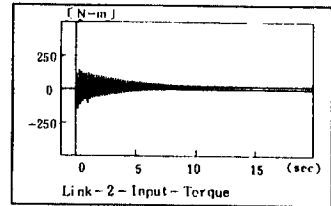
F 3 (a)



F 4 (a)



F 3 (b)



F 4 (b)

## VI. 결 론

본 논문에서는 2개의 관절을 갖는 로봇 매니플레이터의 Dynamics를 Denavit과 Hartenberg 가 제안한 행렬을 이용하여 Lagrange-Euler 식에 의거하여 유도하였다. 이 유도된 비선형 미분방정식의 역함수가 안정하다는 조건하에서, 이산적용제어이론을 이용하여 제어를 설계하였으며 설계된 제어알고리즘의 안정도를 분석하였다.

제안한 제어알고리즘의 그 이론적 타당성을 컴퓨터

시뮬레이션을 통하여 검증하였다. 샘플링 간격을 0.1 초로 놓았을 경우 각 관절은 약 1초정도의 과도상태를 거쳐 0.1% 오차내에서 원하는 각도에 수렴함을 알 수 있었다. 따라서 본 논문에서 제안한 제어알고리즘을 정밀도를 갖는 로봇 매니플레이터의 제어에 적용할 수 있으리라 기대되며 아울러 로봇 매니플레이터의 궤적계획 (trajectory planning) 을 통한 각 관절의 각 운동 파형들이 Inverse Kinematics 를 통하여 결정되었을 때 그 결정된 파형들을 쫓는 추적제어 문제에도 적용가능하리라 기대된다.

## 참 고 문 헌

- 1) P.C.Gregory, "Proceedings of the self adaptive flight control systems symposium"; WADC Technical Report 49-59,

- Wright air Development Centre, Right -Pattern Air Force base, Ohio,
- 2) D.G.Luenberger, "Observing the state

- of a linear system," IEEE Trans.Mil. Electro., vol.Mil-8, pp. 74-pp.80, April, 1964.
- 3) D.G.Luenberger, "Observer for multi-variable systems," IEEE Trans.Automat. Contr., vol.AC-11, no.2, pp.190-pp. 197 , April, 1966.
- 4) R.Bellman, Dynamic Programming, Prenticeon University Press, 1961.
- 5) A.A.Feldbaum, Optimal Control Systems, Academic Press, New York, 1965.
- 6) A.A.Feldbaum, Dual Control Theory 1-4, Automatic & Remote Control, 21, 874 ; 21, 1033; 22, 1; 22, 109.
- 7) K.J.Astrom and P.Eykhoff, "System identification-a survey," Automatica, vol, 7, pp. 123, 1971.
- 8) B.B.Peterson and K.S.Narendra, "Bounded error adaptive control," IEEE Trans.Automat.Contr., Vol.AC-27, no.6, pp. 1161-1168, Dec. 1982.
- 9) G.Kreisselmeier and K.S.Narendra, "Stable model reference adaptive control in the presence of bounded disturbance," IEEE Trans.Automat.Contr., vol.AC-27, no.6, pp. 1169-1175, Dec. 1982.
- 10) J.Denavit and R.S.Hartenberg, "A kinematic notation for lower-pair mechanisms." Journal of Applied Mechanics, pp.215-pp. 221, 1955.
- 11) J.J.Uicker, "On the Dynamic Analysis of Spatial Linkages Using  $4 \times 4$  Matrices," Ph.D.thesis, Northwestern University, 1965.
- 12) M.E.Kahn, "The near-minimum-time control of open-loop articulatedd kinematic chains," Stanford Artificial Intelligence Project Memo.AIM-106, Dec.1969.
- 13) R.P.Paul, "Modeling, Trajectory Calculation and servoing of a Computer Controlled Arm," Stanford Artificial Intelligence Lab., A.I.Memo.177, Sept. 1972.
- 14) A.K.Bejczy, "Robot arm dynamics and control," Jet Propulsion Labs.Tech. Memo.33-669, Feb.1974.
- 15) R.A.lewis, "Autonomous Manipulation on a Robot: Summary of Manipulator Software Functions," Jet Propulsion Labs.Technical Memo 33-679, March.1974.
- 16) C.S.G.Lee, B.H.Lee and R.Nigam, "An Efficient Formulation of Robot Arm Dynamics for Control Analysis and Manipulator Design," Technical Report RSD-TR8-82, Center for Robotics and Integrated Manufacturing, University of Michigan, 1982.
- 17) J.M.Hollerbach, "A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of D Dynamics Formulation Complexity," IEEE.Trans.on Systems, Man, and Cybernetics, vol.SMC-10, no.11, pp.730-pp.736. 1980.