특집/ 인지과학과 논리학

고전논리의 최대 일관성과 이의 공리적 확장

김 영 수 (영남대)

1. 서 론 (고전논리의 대안)

오늘날 기호논리학은 지식표현과 문제해결논리의 기본 수단으로 알려져 있다. 문제의 해결은 문제자체의 정확한 표현을 전제로하며, 따라서 이를 필요로 하는 논리적 수단은 이의 충분성을 만족하여야 한다.

주지하는 바와 같이 이미 확보된 일차논리(명제논리와 술어논리)는 아리스토텔레스의 논리를 통해서는 보여지지 않았든 언어의 논리적 구조를 다채롭고 광범위하게 부각시킴으로써 새로운 논리학의 등장으로 각광을 받았다. 그리고 공리체계로서의 완전성이 확인됨으로써 학문으로서의 권위를 확보하였고, 이의 응용은 인공지능의 가능성을 열어 놓기 까지 하였다.

그러나 이 논리는 차차 여러가지 불충분성과 한계성을 드러내기 시작하였으며, 지식과 사고의 구조를 전적으로 보완하지 못한다는 점이 드러났다. 따라서 이에 대한 대안을 요청하기에 이르렀으며, 이제 이는 고전 논리(classical logic)라는 이름으로 정착되었다.

본 연구는 이러한 고전 논리에 대한 대안논리(alternative logic)를 정립하는데 필요한 가장 기본이 되는 조건들을 명백히 하고자 하며, 이로써 대안 논리의 가능성과 근거를 확보하고저 한다.

고전논리의 불충분성 혹은 비적합성과 적용의 한계성은 특히 인공지능의 연구에서 이미 잘 알려져 있다. 이에 따른 새로운 논리의 정립의 시도는 이미 직관주의 혹은 구성주의 논리, 양상논리, 내포논리(intensionale logic), 지향성의 논리(logic of intentionality), 양자논리(quantum logic)등으로 이미 잘알려 져 있다. 이 이외에도 부분논리(partial logic), 자유논리(free logic), 적합성의 논리(logic of relevance logic)), 다가논리, 퍼지 논리, 비단조 논리(non-monotonic logic), 파생논리(deviant logic)등의 이름 아래 시도 되고 있다.[1]

이들은 고전논리의 부적절성을 이유로 고전논리의 수정을 제창하거나, 아니면 고전논리를 확고하고 완전한 기초 논리로 수용하고 고전논리를 토대로하여 이를 확장하자는 의도에서 출발한다. 동기의 내용을 간과한다면 비고전논리의 정립은 방법에 있어 특징적으로 두 가지로 모색될 수 있는데, 이는 첫째 부적절한 정리의 제거 와 두째 새로운 공리의 추가 이다.

첫째의 방법은 고전논리의 정리중에서 부적절하다고 간주되는 정리들을 제거하고 이 정리가 연역될 수 없도록 고전 논리의 공리체계 혹은 연역규칙의 체계를 수정 재정비하는 일이다.

두번째 방법은 고전논리를 그대로 두고 고전논리의 언어를 확장하는 방법이다. 물론 고전논리의 언어는 이가성을 갖는 명제로 제한한다. 그리하여 이가성의 원리를 적용할 수 없는 명제를 고전논리에 추가하여 새로운 공리적 체계를 만드는 일이다.

첫번째의 정리제거에 의한 공리체계의 구축은 고전논리의 하위논리 혹은 부분논리의 개발이다. 이 방법의 이용으로 보이는 것은 직관주의적 구성주의적 대화논리 그리고 Gentzen의 자연추리적 연역체계의 조직인데 이에 거론되는 공리 혹은 규칙들은 모두 고전논리에서 타당하고 유도된 규칙들 뿐임으로 이 방법은 사실상 고전논리에 의존한다. 그러면서도 이에 사용된 논리연산자들은 고전논리의 연산자들과는 의미론상 구별되어져야 한다. 따라서 이 방법은 고전논리와 다른 새로운 논리연산자의 도입을 의미한다. 결과적으로 이는 고전논리 언어의 확장을 의미한다.

이러한 이유에서 본 연구는 고전논리 특히 명제논리의 확장에 관한 기초문제에 집중코자 한다.

고전논리의 확장은 다음의 몇가지 측면에서 고찰되어야한다고 본다:

고전논리어를 확장할 때 논리적 구조와 성질에 어떠한 변화가 일어 나는가?(3). 공리적 확장의 체계로서 정상적(normal)이라고 간주 되는 루이스의 체계에는 적절성의 문제가 없는가?(4). 정상논리 이외의 어떠한 공리적 체계가 가능한가?(5). 그렇다면 어떠한 체계가 가능한가?(6).[2]

---

1) 참조: D. Gabbay-F. Guenther: *Alternatives to Classical Logic, Handbook of Philosophical Logic III*, Drdrecht, 1986;
J. Retti u.a.: *Artificial Intelligence, Stuttgart*, 1986

이를 고찰하기 위하여 근본적으로 검토되어야 할 문제는: 고전논리는 도대체 어떠한 조건하에서 확장 될 수 있을가(2) 라는 문제이다. 다음에서 우리는 먼저 고전논리는 모종의 언어적 확장 없이는 그 자체로서는 더 이상 확장 될 수 없음을 밝힐 것이다. 이는 고전논리의 특성으로 부각되는 최대 일관성 때문이다:

2. 고전논리의 최대 일관성

주지하는 바와 같이 한 공리적 체계$\boldsymbol{A}$는 $\boldsymbol{A}$의 언어 Λ를 부분집합 Λ_1, Λ_2, Λ_3으로 삼분하게 한다:

$$\Lambda_1 = \{\varphi \varepsilon \Lambda:\ \boldsymbol{A} \vdash \varphi\}$$
$$\Lambda_2 = \{\varphi \varepsilon \Lambda:\ \boldsymbol{A} \nvdash \varphi, -\varphi\}$$
$$\Lambda_3 = \{\varphi \varepsilon \Lambda:\ \boldsymbol{A} \vdash -\varphi\}$$

여기서 우리는 Λ_1의 농도 즉 $\boldsymbol{A}$의 정리의 수를 증가시키기 위하여 $\boldsymbol{A}$의 정리가 아닌 복합논리식 φ_1 즉 φ_1:$\boldsymbol{A} \nvdash \varphi_1, -\varphi_1$ 를 $\boldsymbol{A}$의 공리에다 추가하면 될 것이다. 이렇게 확장된 공리계 $\boldsymbol{A}[\varphi_1]$는 일관적(무모순적 consistent)인 체계가 되리라는 추측을 할 수 있게 된다. $\boldsymbol{A}[\varphi_1]$를 $\boldsymbol{A}_1$이라하고 다시 $\boldsymbol{A}_1 \nvdash \varphi_2, -\varphi_2$ 인 복합논리식 φ_2를 $\boldsymbol{A}_1$에 추가하면 다시 새로운 공리계 $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_1[\varphi_2]$는 계속 일관성을 유지하게 될 것이다.

그러나 이러한 방법을 계속 사용한다면 무한히 많은 공리적 확장이 가능하리라는 것은 의심의 여지가 있다.

일단 우리는 이러한 점진적 확장이 최대한으로 이루어진 공리적 체계를 구상할 수 있는데 이러한 체계를 최대 일관적(maximal consistent)이라 부르고자 한다. 혼란을 피하기 위하여 이를 다음과 같이 정의하고자 한다:

<u>정의(최대 일관성)</u>

한 공리계 $\boldsymbol{A}$에서 $\boldsymbol{A}$의 정리가 아닌 어떠한 명제($\boldsymbol{A}$의 언어에 속하는)를 정리로 추가하드라도 언제나 모순이 연역될 때 $\boldsymbol{A}$는 최대 일관적이다.

2) 괄호안의 수자는 다음에서 다루어질 절의 번호임.

최대 일관적인 공리체계는 따라서 더 이상 확장될 수 없는 공리체계이다. 앞에서 예고한 바와 같이 고전논리(이하 "K")는 바로 이와 같은 성질을 소유하고 있는 것이 특징이다. 이를 정리하면:

<u>정리1(고전논리의 최대 일관성)</u>
고전적 명제논리는 최대 일관성을 갖는다.

이를 기호로 표기하면: 모든 고전논리적 명제 φ 에 대하여

$$K \nvdash \varphi \ \Rightarrow\ K[\varphi] \vdash \bot.$$

이를 확인하기 위하여 우리에게 이미 잘 알려진 다음의 두 가지 정리를 도입하면 좋을 것이다:

<u>보조정리1.1</u>
명제논리의 토톨로지가 아닌 모든 논리식은 동치의(equivalent) 전형적인 표준 공접식(cononical conjunctive normal form) 을 갖는다.

<u>보조정리1.2</u>
한 공리 체계 A 의 모든 정리는 이의 논리구(literal)에 A의 언어의 어떠한 명제를 대입하여도 역시 이 체계의 정리가 된다.

이 두가지 보조정리를 이용하면 고전논리의 최대일관성은 다음과 같이 간단히 증명될 수 있다:

<u>증명:</u>
우리가 증명하고자 하는 바는 $K \nvdash \varphi \ \Rightarrow\ K[\varphi] \vdash \ \bot$ 이다.
먼저 φ 를 $K \ \nvdash \varphi$ 이라고 하자.
그러면 위의 보조 정리에 따라 φ의 전형적 표준공접식을

$$\prod_{i}^{m} \sum_{j}^{n} \varphi_{ij} \text{ (n는 요소명제의 수)}$$

로 표기 할 수 있다. 여기서 논리구 φ_{ij}는 이접지를 가르킨다.
이제 $K \nvdash \varphi$ 이기 때문에 φ의 진리치는 참이거나 거짓이다. 그러므로 φ의 진리치를 거짓으로 하는 진리함수가 존재할 것이다. 이 함수를 υ 라 한다

면, $v(\varphi)=0$ 이다.

따라서 이 함수에 의하면 φ의 이접지중 적어도 하나는 거짓이어야 한다.

이 이접지를 $\sum_{j}^{n} \varphi_{aj}$이라 한다면 $v(\sum_{j}^{n} \varphi_{aj}) = 0$ 이다.

따라서 모든 φ_{aj} 에 있어서 $v(\varphi_{aj}) = 0$ 이다.

이제 이에 대응하여 φ의 모든 φ_{aj} 와 동일한 논리구에 모순명제⊥를 대입할 수 있고 이렇게 대입된 명제를 $sub(\varphi)$라 한다면 $sub(\varphi) = \bot$ 이다. 따라서 $K[\varphi]$ 는 보조정리1.2에 따르면 ⊥를 정리로 포함한다, 즉:

$K[\varphi] \vdash \bot$. □

3. 고전논리어의 확장

고전논리의 최대 일관성은 고전논리의 확장 불가능성을 의미 한다. 이의 근본적인 이유는 고전논리 자체의 한계성에 있는 것이 아니라 고전논리 언어 자체의 성질에서 찾아 진다. 고전논리어는 이가성(Bivalence)을 갖춘 명제들을 대상으로 한다. 그러므로 이가성에 의존하지 않는 명제들은 고전논리어의 요소로서의 자격을 상실한다.

고전논리의 한계성을 탈피하기 위하여 진리치를 확대하는 방법이 있겠으나, 여기서 문제시 하고자 하는 것은 지향성 혹은 내포성을 갖는 명제에 국한 한다.

명제를 이가 진리함수에 따라 분해할때 복합명제 이면서도 더 이상 분해 할 수 없는 이른바 내포명제(intensional proposition) 들이 있다. 이 명제가 그 자체로서 진리치를 갖을 때 지향명제((intentional proposition))라고 불리워진다. 지향명제들은 각기 그 안에 고전논리적 부분명제들을 가지면서도 이의 진리치는 명제 자체의 진리치를 결정하지 못하기 때문에, 이의 부분명제는 고전논리상으로는 원자명제로서 취급되지 못할 것이다.

따라서 지향명제는 그 안에 내포된 명제가 복합명제이건 아니건 고전논리상한 원자명제로 취급될 수 밖에 없다. 이러한 분석에 따르면 고전논리상의 원자명제란 단순명제로만 된 것이 아님이 분명해 진다.

고전논리의 한계성과 불충분성 혹은 비적합성은 여러가지 관점에서 지적될 수 있으나 바로 이러한 언어상의 성질때문에 기인한다.

만약 이러한 고전논리어의 제약성을 벗어나서 지향명제의 부분명제를 논리어

로 취급한다면 이것은 고전논리어의 확장을 의미하며 내포성 혹은 지향성은 논리적 연산자로 취급될 수 있다.

우리는 여기서 내포성 혹은 지향성을 통일되게 양상연산자 (기호 "o")로 명명하고 이러한 명제를 양상명제($o\varphi$)라 칭할 것이다.

그러면 우리는 고전논리어를 Λ, 지향성의 도입에 의한 고전논리의 확장 언어를 Λ^* 라 한다면, 이를 다음과 같이 정의할 수 있다.

<u>정의</u>

(i) $\varphi \varepsilon \Lambda$ 이면 $\varphi \varepsilon \Lambda^*$,

(ii) $\varphi \varepsilon \Lambda^*$ 이면 $o\varphi \varepsilon \Lambda^*$,

(iii) $\varphi \varepsilon \Lambda^*$ 이면 $-\varphi \varepsilon \Lambda^*$,

(vi) $\varphi, \phi \varepsilon \Lambda^*$ 이면 $\varphi * \phi \varepsilon \Lambda^*$; $* \varepsilon \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

이와 같은 고전논리어의 확장은 고전논리에 여러가지 변화를 초래한다. 무엇보다도 빼놓을 수 없는 것은 먼저 다음의 세가지 사실이다:

(가) 고전논리어의 확장은 논리적 연산자의 증가를 수반한다.

(나) 고전논리어의 확장은 토톨로지의 증가를 수반한다.

(다) 고전논리어의 확장은 그 뿐 아니라 토톨로지가 아닌 명제들의 증가를 수반한다.

위의 언어 확장에 따르면 $o\varphi$, $o-\varphi$, $o(\varphi \wedge \phi)$, $o(\varphi \vee \phi)$, $o(\varphi \rightarrow \phi)$, $o^n\varphi$ 등의 논리식들이 산출된다. 그러므로 Λ^*는 고전논리어에 비하여 대단히 큰 농도를 가지게 된다.

공리 추가에 의한 특수한 제한이 없는 한 이러한 언어 확장에는 고전논리상에 적용되는 라이브니츠의 동일성의 원리 $\varphi \equiv \phi \Rightarrow F(\varphi) \equiv F(\phi)$ 는 변함없이 확장언어에도 타당하다, 즉:

$$\varphi \equiv \phi \Rightarrow o\varphi \equiv o\phi.$$

따라서 언어가 확장되더라도 고전논리의 완전성은 그대로 유지된다.

그러나 공리추가에 의한 특수한 제한이 없는 한, $o-\varphi$, $o(\varphi * \phi)$는 $-\varphi$, $\varphi * \phi$와 동일시 되지 못한다($* \varepsilon \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$). 따라서 $o-\varphi$, $o(\varphi * \phi)$에서의 $-$ 와

* 는 고전적 연산자가 아니다.

고전논리어의 확장으로 인하여 토톨로지의 농도가 증가한다는 데에는 별로 이의가 없다. 왜냐하면 고전적 토톨로지의 논리구에 이제 양상명제를 대입할 수 있기 때문에 이로 인하여 새로운 형태의 토톨로지가 생성 된다. 예를 들어 $o\varphi \vee -o\varphi$ 는 새로운 모습의 토톨로지이다. 그러므로 이와같이 고전적 토톨로지에서 얻은 양상명제를 "고전적 양상토톨로지"라 부를 수 있다.

고전적 양상토톨로지의 산출은 다음과 같이 쉽게 정식화할 수 있다:

보조정리:
모든 원자명제 φ_i 와 임의의 명제 ϕ_i 그리고 명제함수 f 에 대하여:
(i) $K \vdash f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ 이면 $K \vdash f(o\varphi_1, \ldots, o\varphi_n)$
(ii) $K \vdash f(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ 이면 $K \vdash f(o\phi_1, \ldots, o\phi_n)$

이러한 고전적 양상토톨로지의 산출은 순전히 언어확장에 의해서만 일어난 것이므로 공리적 추가에 의한 어떠한 체계에도 이들은 타당할 것이다. 따라서 이를 다음과 같이 고전논리의 공리적 확장의 기본조건으로 정식화할 수 있다.

정리 2
고전적 양상 토톨로지는 지향성의 도입에 의한 고전논리어의 확장 위에서 시행한 어떠한 공리적 확장에서도 언제나 정리가 된다.

고전적 토톨로지의 증가는 마찬가지로 우연명제(contingent proposition)의 증가를 의미하기도 한다. 이의 기본적인 예로서

$$o\top, \quad o(\varphi \rightarrow \phi) \rightarrow (o\varphi \rightarrow o\phi)$$

를 들 수 있는데, 여기서 $\top$는 고전적 토톨로지를 가리킨다. 그러나 $o\top$는 명백히 형식논리상 고전논리적 진리가 아니며, 마찬가지로 $o\bot$도 고전논리상의 거짓이 아니다. 왜냐하면 임의의 고전명제 φ에 있어서 이의 값 $v(\varphi)$가 결정되드라도 $v(o\varphi)=o(v(\varphi))$ 이기 때문에 $v(o\varphi)$는 결정되지 않는다. 그 뿐만 아니라 $v(-o\varphi)$와 $v(o-\varphi)$도 결정되지 않는다. 따라서 고전논리적 진리혹은 거짓을 내포로 갖는 양상명제는 고전논리상의 정리가 될 수 없다. 이를 명백히 표현하면:

<u>정리 3</u>[3]
$K \vdash \varphi \;\Rightarrow\; K \nvdash \mathrm{o}\varphi, -\mathrm{o}\varphi, \mathrm{o}-\varphi.$

고전논리어의 확장에 따른 이러한 변화들을 감안한다면, 우리는 이제 고전논리상 진리가 아닌 양상 논리식을 공리로 추가하여 공리적 체계들을 조직할 수 있을 것이다.

4. 이른바 정상적인 공리적 확장과 루이스-역리

공리적 확장의 체계로서 가장 모범이 되는 것은 일반적으로 잘 알려진 "정상적(normal)"이라고 불리워 지는 양상논리의 체계들이다. 주지하는 바와 같이 정상적 양상논리라고 불리워 지는 체계는 고전논리의 언어적 확장 위에서 고전적 양상토톨로지가 아닌 위에 언급한 다음의 논리식을 공리로 채택하거나, 혹은 이를 정리로 하는 체계를 말한다.[4]

$$\mathrm{o}\top,\quad \mathrm{o}(\varphi \rightarrow \phi) \rightarrow (\mathrm{o}\varphi \rightarrow \mathrm{o}\phi)$$

따라서 고전논리의 확장으로서 이들을 공리로하는 공리적체계

$$K[\mathrm{o}\top, \mathrm{o}(\varphi \rightarrow \phi) \rightarrow (\mathrm{o}\varphi \rightarrow \mathrm{o}\phi)]$$

는 모든 정상적 논리의 기본체계라 할 수 있다. 이를 다시 확장하기 위하여 $\mathrm{o}\varphi \rightarrow \mathrm{oo}\varphi$, $\varphi \rightarrow \mathrm{o}-\mathrm{o}-\varphi$, $-\mathrm{o}-\varphi \rightarrow \mathrm{o}-\mathrm{o}-\varphi$ 등의 논리식을 점차 추가함으로서 여러 체계들을 형성한다. 루이스의 체계들 S1~S5 들이 모두 이에 해당한다.

이 체계의 양상자(양산연산자)와 동형(isomorph)인 양상으로는 논리적 진리성 즉 논리적 필연성이 있는데, 이를 정상적이라고 하는 이유는 첫째 $\mathrm{o}\top$ 를 진리로 전제하기 때문이다. 두째로는 정리 $\mathrm{o}(\varphi \rightarrow \phi) \rightarrow (\mathrm{o}\varphi \rightarrow \mathrm{o}\phi)$에 따르면

---

3) 증명은 생략함. 이의 증명은 고전논리의 완전성을 이용하면 될 것이다.
4) 정상성의 개념은 S.A.Kripke: *Semantical Analysis of Modal Logic I* in Zeitschrift für Mathematische Logik 9 (1963) p.67-96 에 의함.

$$o(\varphi \rightarrow \phi),\ o\varphi\ \vdash\ o\phi$$

라는 연역규칙을 채택할 수 있는데 이 규칙이 매우 정상적이라 보여 지기 때문이다. 이리하여 대부분의 지향성을 이 정상논리의 체계로 해석할려는 경향이 있다. 그러나 다음에 볼 것이 겠지만, 이 정상논리 이외에도 수없이 많은, 그리고 중요하다고 여겨지는 체계들이 존재한다.

이 체계가 정상적이라고 보여지는 또 다른 특징은 양한자(Quantor, quantifier)와 동형인 다음의 분배규칙이 정리로 성립되는데 있다.

$$o(\varphi \wedge \phi) \equiv o\varphi \wedge o\phi, \quad -o-(\varphi \vee \phi) \equiv -o-\varphi \vee -o-\phi.$$

그외 정상논리의 정리로 간주되는 것은 다음의 논리식들이다:

(1) $o-\varphi \rightarrow o(\varphi \rightarrow \phi)$
(2) $o\varphi \rightarrow o(\phi \rightarrow \varphi)$
(3) $-o(\varphi \rightarrow \phi) \rightarrow -o-\phi$
(4) $-o-(\varphi \wedge -\phi) \rightarrow -o--\varphi$
(5) $o-\varphi \wedge o-\phi \rightarrow o(\varphi \equiv \phi)$
(6) $o\varphi \wedge o\phi \rightarrow o(\varphi \equiv \phi)$

이러한 논리식을 루이스는 "엄밀내함(strict implication)의 역리"라고 부른다.[5] 여기서 역리라고 한 것은 그가 엄밀내함이라고 부르는 $o(\varphi \rightarrow \phi)$는 위와 같은 방식으로 분배되지 않는다는 것이다. 위의 정리들에 사용된 양상은 논리적 필연성/진리성을 모델로 한 것인데, 논리적이 아닌 필연성에 관해서는 전혀 맞지 않는다. 그뿐아니라 많은 양상논리학자들이 취급하고 있는 것처럼 당위성, 신념문, 인지문, 의지의 표현, 소원, 희망등에 관한 명제에 대해서 까지 이러한 정리를 엄격히 적용시키는데는[6] 상당한 무리가 있다.

기본 정상논리의 양상성이 논리적 필연성과 동형인지는 $o\varphi$의 명제변수에 논

---

5) C.I.Lewis-C.H.Langford: *Symbolic Logic*, New York,1932, p 174f, 176
6) F.v. Kutschera: *Einführung in die Intensionale Sematik*, Berlin 1985
B.Chellas: *Modal Logic*, London 1980 참조

리적진리 혹은 논리적 거짓을 대입시키고 o⊤를 o⊤≡1 로, o⊥를 o⊥≡0 로 해석하면 기본 정상논리의 양상성은 반드시 논리적 진리성과 동형이 될 것이다.

이에 대한 해석은 Kripke의 가능세계-의미론[7]이 가장 적절할 것이다. 즉 oφ의 진리성을 "모든 도달할 수 있는 가능한 세계에 있어서 φ가 참"이라고 해석하여 양상명제들은 가능세계의 구조에 따라 해당되는 의미를가진다고 보는 것이다.

그러나 문제가 되는 것은 이러한 해석은 도달할 수 없는 세계에 대해서는 아무런 의미가 부여되지 못한다.[8] 그리고 위에서 언급한 동일성

$$o(\varphi \wedge \phi) \equiv o\varphi \wedge o\phi, \quad -o-(\varphi \vee \phi) \equiv -o-\varphi \vee -o-\phi$$

은 많은 지향명제에서는 적용되기 어렵다.[9]

5. 비정상 논리의 가능성

정상논리 만이 논리적 체계로서 성립한다는 것은 형식논리상 아무런 근거가 없다. 왜냐하면 정상논리가 채택한 공리와 정리들 이 외에도 공리로 채택될 수 있는 양상 명제들 즉 고전적 토톨로지가 아니면서 또한 정상논리의 정리가 아닌 것들은 많이 있기 때문이다. 이에 대하여 우선 몇가지 문제점을 밝혀 보고자 한다.

일반적(논리적 혹은 비논리적) 진리성에 적합한 양상을 표현하는 것으로 다음의 논리식이 있다: $o(\varphi \vee \phi) \rightarrow o\varphi \vee o\phi$. 이 논리식은 정규논리의 정리가 아니다. 그러나 왜 이 논리식이 정리가 될 수 있는 논리가 있을 수 없는지에 대한 이유는 명백하지 않다.

다음으로 정상논리에서는 o⊤ 를 정리로 채택하고 있는 데, 지향명제에 내포된 명제가 논리적 진리일 때 이를 진리로 수용할 수 없는 것들도 있다. 예를 들어 양상 o를 당위성(deontic modality)이라 할 때 $o(\varphi \vee -\varphi)$는 공리로 채택되기 어렵다. 왜냐하면 φ도 $-\varphi$도 당위성을 갖지않은 행위도 있을 수 있기 때문이

---

7) S.A.Kripke: *Semantical Analysis of Modal Logic I* in Zeitschrift für Mathematische Logik 9 (1963) p.67-96

8) G. Forbes: *Metaphysic of Modality*, Oxford 1985, p70

9) 예를 들면 두 행위의 당위성 $o(\varphi \wedge \phi)$ 는 두 행위 각각의 당위성 $o\varphi \wedge o\phi$와 반드시 동일한 것은 아니다.

다. 즉 $-o\varphi \wedge -o-\varphi$ 인 행위 φ가 있을 수 있다. 이런 경우 마찬가지로 $o\bot$ 즉 $o(\varphi \wedge -\varphi)$도 반드시 거부되지는 않는다.

이것은 더욱더 직관주의 논리나 양자논리에서 보듯이 $\varphi \vee -\varphi$가 전혀 결정될 수 없는 상황의 실존을 전제한다면, $o(\varphi \vee -\varphi)$의 진리치를 고정시킬 수 없을 것이다.

이와같이 $o\top/o\bot$를 참/거짓으로 수용할 수 없는 지향성도 있다. 그러므로 정상논리에서 처럼 $o\top \equiv 1$, $o\bot \equiv 0$ 를 반드시 진리로 채택해야 할 이유는 없다. 그러므로 $o\top$와 $o\bot$의 값을 임의로 두는 것이 더 근본적이다.

한 정리가 한 체계에서 타당하다면 이 정리에 $\top$ 와 $\bot$ 를 대입하여도 정리가 되어야 한다. 흥미로운 것은 위의 정상논리의 공리적 제한이 없드라도 고전논리상 이를 충족하는 논리식이 실존한다.[10] 이의 예가 바로 구성주의 논리[11]가 내세우는 전제로서 위의 $o(\varphi \vee \phi) \rightarrow o\varphi \vee o\phi$ 이다.

정상논리의 공리는 고전적 양상토톨로지가 아님으로 이를 공리로 추가함으로써 고전논리를 확대시킨 것이다. 정상논리의 공리 이외에도 고전적 양상토톨로지가 아닌것은 수없이 많으므로 이를 공리로 추가하여 비정상적 공리적체계로 만들 수 있을 것이다. 이러한 확장의 가능성의 근거는 무엇보다도: 고전 논리는 언어 확장에 따라 이의 최대 일관성을 상실한다는데 있다, 즉

<u>정리4</u>

고전언어의 확장 Λ^* 위의 고전논리 K^* 는 최대 일관성을 갖지 않는다.

이를 기호화 하면: 모든 양상 논리식 μ에 대하여,

$$K^* \nvdash \mu, -\mu \;\Rightarrow\; K^*[\mu] \nvdash \bot$$

<u>증명 :</u>

$K^* \nvdash \mu, -\mu$ 를 충족하는 μ는 고전적 양상 우연명제이다. 그러므로 이러한 μ에는 두가지 형식이 가능하다:

(가) $\mu = o\varphi$ (나) $\mu = f(o\varphi_1,\ldots,o\varphi_n)$.

---

10) "김영수: 양자논리의 양상논리적 정초", 『철학』 제35집 1991(229쪽) 과 "양자논리상의 진리와 양상토톨로지" 『한민족철학자대회보』 1991(355쪽) 참조

11) W.Rauthenberg: *Klassische und Nichtklassische Logik*, Braunschweig 1979 p.305.

(가)의 경우는 어떠한 경우든 토톨로지가 못된다.

(나)의 경우: μ의 전형적 표준공접을 $\mu = \prod_{i}^{m}\sum_{j}^{n} o\mu_{ij}$ 로 표시할 수 있다. 이때 μ는 $K^{*} \nvdash \mu, -\mu$ 이기 때문에 $v(\mu) = 0$ 인 진리함수 v가 존재한다. 그러면 어떤 공접지 $\sum_{j}^{n} o\mu_{aj}$ 에 있어서 $v(\sum_{j}^{n} o\mu_{aj}) = 0$ 이고 모든 $o\mu_{aj}$에 있어 $v(o\mu_{aj})=0$. 그러나 $o\mu_{aj}$는 복합명제 임으로 $o\mu_{aj}$ 대신에 어떠한 비양상명제로도 대입할 수 없다. 그러므로 $K^{*}[\mu] \nvdash \perp$. □

비정상논리의의 가능성에 대해서는 이로서 충분한 근거가 제시되었다고 본다. 그러나 고전논리상 우연적인 양상명제들은 무한히 많고, 이를 차별없이 점차적으로 추가하면 모순이 발생할지 모른다. 그러나 一群의 양상명제들이 전혀 모순을 연역하지 않는 것들이 있다면 이들의 공리적 추가는 언제나 하나의 논리적 체계를 이룰 것이다. 다음에서 이러한 논리적 체계들을 "정규논리"(Regular logic)라는 이름 아래 정의해 보고저 한다.

6. 정규논리에로의 확대

기존의 공리적 체계들의 공리들과 정리들을 관찰해보면 이 들에게는 하나의 공통된 성질이 발견되는데 이들은 다음의 성질을 갖고 있다:

정의(정규성, regularity)[12]:
한 양상명제 φ에 있어서 그 안의 모든 양상연산자를 제거한 명제가 고전적 토톨로지일 때 φ를 정규적(regular)이라 한다. 그리고 정규적 명제들의 집합, 그리고 정규적 명제들만을 정리로 갖는 논리적 체계 역시 정규적이라 한다.

예를 들어 정상논리들의 공리와 정리들은 모두 정규적으로 보인다. 그리하여 우리는 모든 정규적 명제를 공리로 갖는 체계는 언제나 정규적이라는 추측을 하게

12) 정규성의 개념은 Sobocinski에 의함 G.E.Hughes-M.J.Creswell: *Einführung in die Modallogik*, Berlin 1978, p237

되는데 이는 정확히 확증 될 수 있다. 이를 위해서는 다음의 두가지 정리가 필요하다:

정리 5
정규적 명제들로 부터 연역되는 것은 모두 정규적이다.

증명:
이에 대한 증명은 정규적 명제들이 연역규칙(대입규칙과 분리규칙(modus ponens))에 따르는지를 규명하면 될 것이다.

위에서 우리는 양상성(Modality)을 논리 연산자로 취급하였다. 그러므로 양상명제의 논거는 역시 비-양상명제이다. 고전적 토톨로지는 이에 어떠한 명제를 대입하여도 역시 토톨로지이다. 이런 점에서 대입규칙은 아무런 문제가 없다. 왜냐하면 명제변항을 대입하여도 정규명제의 정규성은 변하지 않는다. 즉 대입된 정규 명제에 있어서 이의 양상성을 제거하드라도 역시 토톨로지이다.

둘째로 검토되어야 할 것은 분리규칙인데 이는 다음과 같이 증명된다:

만약 φ_1이 정규 명제 인데, φ_2 가 정규명제가 아니라면, $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ 는 정규 명제가 될 수 없다. 그러므로 만약 $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ 가 정규 명제이고, φ_1 이 정규명제라면, φ_2 도 정규명제이다.

따라서 $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$, $\varphi_1 \vdash \varphi_2$ 는 정규명제들에게도 타당하다. □

정리 6
모든 정규명제들은 상호 일관적이다.

증명:
이는 간접증명으로 쉽게 밝혀 진다:

어떠한 두명제 φ, ϕ 가 정규적이라 하고 이들이 서로 모순 즉 $\varphi \equiv -\phi$ 이라 가정하고, ε 를 양상성의 제거라고 하자.

그러면 $\varphi, \phi, -\phi$ 는 모두 정규적이어야 하며, 그렇다면 $\varepsilon(\phi) \equiv \varepsilon(-\phi)$ 이어야 하는데 이는 불가능하다. 왜냐하면 $\varepsilon(\phi) \equiv \top$ 이면

$\varepsilon(-\phi) \equiv -\varepsilon(\phi) \equiv -\top \equiv \bot$ 임으로 위의 $\varepsilon(\phi) \equiv \varepsilon(-\phi)$에서 $\top \equiv \bot$ 라는 모순이 발생한다.□

정리 5에 의하면 모든 정규명제들은 정규명제만을 연역하고, 정리 6에 의하면 모든 정규명제들은 상호일관적이다. 따라서 결론은

<u>정리 7</u>

고전논리에 어떠한 정규명제들을 공리로 추가하여도 이 공리체계는 일관적이다.

정규명제는 정상논리의 공리만이 아니다. 따라서 정리7 에 의하면 정상논리 이외에도 많은 공리적 체계가 존재할 것이다.

8. 결 론

고전논리의 공리적 확장은 이른바 정상논리의 범위를 넘어 정규논리에로 확대될 수 있다는 것은 이제 충분히 확인되어졌다고 본다. 공리적 확장 가능성의 실존은 따라서 가능한 논리적 체계들의 천착과 이에 따른 논리적 구조와 모델의 탐구를 필요로 하며, 이것은 논리 연구와 인지과학의 한 중요한 과제가 될 것이다.

우리는 이를 명백히 하는 가운데 고전논리의 공리적 확장에 관한 필수적인 몇가지 기본 사항들을 파악하기에 이르렀다:

(1) 고전논리는 그 자체로 최대한의 일관성을 갖이므로 더 이상 확대될 수 없다. 그러나

(2) 지향명제의 내포를 요소명제로 도입할 때 고전논리의 언어는 확장된다.

(3) 이러한 고전 논리어의 확장은 논리적 연산자들의 증가를 수반한다. 그리고

(4) 고전 논리 언어의 확장은 고전적 토톨로지의 증가를 수반한다.

(5) 고전논리의 공리적확장은 정상논리만 가능한 것이 아니다.

(6) 모든 정규 논리들도 연역적 한정성과 一貫性을 확보하고 있다.