프레게의 수 개념과 논리주의

심 철 호

목 차

Ⅰ. 머리말－역사적 배경 및 논리주의

프레게의 「산수학의 기초」(1884)는 그 제목이 말해주듯 수학에 대한 확고한 기초를 세우자는 의도에서 나온 저작이다. 이를 뒤집어서 해석하자면 이 당시엔 수학의 기초가 부재했거나 혹은 있다 해도 흔들리고 있었음을 시사한다고 하겠다. 과연 19세기 후반의 수학계는, 다른 학문 분야에서의 엄청난 변화와 더불어, 일대 격변기를 거치고 있는 중이었다. 비유크리트 기하학은 접어두고, 수학(기하학을 제외하고 대수학과 산수학만을 포함하는 좁은 의미에서의 수학) 분야에서만도, 프레게 자신의 지적대로,[1] 함수, 연속체, 극한, 무한 등의 기초개념에 대한 분명한 정의가 요망되었을 뿐만 아니라, 음수, 무리수 등 이미 자연과학에서 채택되어 응용된지 오래된 개념들 또한 그 신뢰도를 보다 면밀히 검토해보아야 할 처지에 이르렀던 형편이었다. 역사적으로 보더라도 고대 희랍에서부터 공리체계적 전통 하에서 발전되어온 기하학에 비하여, 인도, 바빌로니아, 아라비아 등을 거치면서 산발적으로 발전되어온 (좁은 의미에서의) 수학은 그 엄밀성에 관한 한 항상 기하학의 뒷전에 머물러 왔었다.

여기에 수학 외적인 배경을 아울러 살펴보자면, 1831년 헤겔의 죽음과 함께 독일 관념론이 일단 그 절정기를 넘기면서부터 유물론, 자연주의, 경험주의, 심리주의, 신칸트주의, 실증주의 및 전통적 관념론 등 19세기 후반의 철학계는 실로 백화제방의 시대를 구가하고 있었다. 여기에 자연과학을 선두로 심리학, 언어학, 사회학, 역사학 등 제반 경험과학의 발달

1) *The Foundations of Arithmetic* p.1 (이라 *FA*라 약칭함)

이 한 몫을 했음을 더 말할 나위도 없었다.[2)]

이러한 소용돌이 속에서 수학계 또한 그 내적인 변화와 함께 외적인 사조들의 영향을 받아 동요하게 되었으니, 그 대표적인 현상이 프레게에 따르면 수학에서의 심리주의적 견해와 형식주의적 견해의 대두이었다.

「산수학의 기초」의 전반부는 바로 이들에 대한 비판에 할애되어 있다. 프레게가 산수학에 대한 논리적 분석을 하면서 무엇보다도 절감한 것은 산수학에서의 기본적인 용어들의 의미에 관하여 수학자들간에 의견이 엇갈리고 있다는 점이었다. 그는 수학자들이 '수', '집합', '등호', '변수', '함수' 등의 기본 용어들의 의미에 관하여 체계적으로 혼동하고 있으며, 그 중에서도 특히 '수' 개념을 둘러싼 혼란이 문제라고 지적한다. 이를테면 대표적인 심리주의자의 한 사람인 밀(Mill)은 수가 사물들의 집합체(agglomeration of things)에 귀속되는 성질이라고 한다. 그러나 프레게에 따르면 그 집합체는 어떻게 쪼개지느냐에 따라 둘도 될 수 있고 열도, 백도 될 수 있음을 지적하면서 수를 사물의 속성으로 보는 견해를 물리친다.[3)] 그렇다면 수는 주관적인 것인가? 프레게는 이런 견해에도 반대한다. 수가 주관적이라면 수 및 수의 법칙 등에 대한 탐구는 불가불 우리의 심적 과정에 대한 탐구일 수 밖에 없다. 이것은 곧 수학의 기초를 심리학이라는 경험과학에 두는 것과 다름없다. 그러나 프레게가 보기에 이것은 본말이 전도된 것이다. 경험과학이 오히려 수학을 바탕으로 하고 있는데 수학이 다시 심리학에 뿌리를 두고 있다면 순환적인 오류에 빠지고 말 것이며, 그렇다고 해서 경험과학의 토대로서 수학을 배제시킨다면 경험과학적 지식의 진리성이 의심받게 될 것이다.[4)] 수가 사물의 속성도 아니고 주관적인 것도 아니면, 수란 종이 위에 쓰여진 물리적 기호(physical signs)에 불과한 것인가? 이러한 형식주의[5)]에 대해서도 물론 프레게는 찬동하지 않는다. 수가 물리적 기호에 불과하다면 이를테면, 수 2는 하나만 있을 수 있는게 아니라, '2', 'Ⅱ' '5-3', '1+1', 'two' 등 여러 가지가 될 것이다. 그렇다면 산수학은 성립할 수 없게 된다. 왜냐하면 자연수는 각기 단 하나의 후자만을 갖는다는 공리조차도 거짓이 될 것이기 때문이다. 프레게에 따르면 도대체 형식주의자들은 기호를 기호가 의미하는 바와 혼동하는 오류를 범하고 있다.[6)]

앞으로 이 글에서는 심리주의나 형식주의에 대한 프레게의 여러 형태의 논박들이 얼마나 결정적인지를 고찰하지는 않겠다. 대신 심리주의나 형식주의에 맞서서 프레게가 제시하는 이른바 논리주의의 프로그램이 얼마나 성공적인지를 특별히 수 개념을 실마리로 해서 풀어보는 것을 과제로 삼겠다.

프레게의 논리주의를 한 마디로 요약하자면, 산수학의 모든 진리는 분석적 진리라는 말이 된다. 여기서 분석적이라는 말은 논리적이라는 뜻이며, 동시에 선험적이라는 의미를 함축한다. 물론 산수학의 개념이나 법칙들이 경험적 대상의 탐구에 적용되지만 그렇다고 해서 산수학 자체도 경험적이라고 보아야 할 이유는 없다.[7)] 물론 그 반대의 경우도 마찬가지

2) Hans Sluga *Gottlob Frege* ch.1 §§1~5.

3) *FA* pp.29~30.

4) *FA* p.34.

5) 오늘날 널리 알려진 D.Hilbert로 대표되는 형식주의와는 다르다. S.Barker의 *Philosophy of Mathematics* pp.106~107에서는 이런 입장을 유명론의 일종으로 분류하고 있다.

6) *FA* p.22.

다. 수학의 추상성, 일반성, 정밀성, 확실성, 광범위한 적용가능성 등이 수학을 선험적인 것으로 보게 되는 특성으로 거론되지만 이 특성들이 과연 수학의 특성인지, 또 수학의 특성이라 하여도 그것 때문에 수학이 선험적인 것이라는 점이 타당하게 여겨질 수 있는지는 다시금 얼마든지 문제가 될 수 있다. 더욱이 수학을 논리학에로 환원시키는 계획이 성공한다 해도 그 자체로서 수학의 선험성이 해명된 것은 아니다. 단지 수학의 선험성 여부의 문제를 논리학의 선험성 여부의 문제로 환원시킨데 불과할 뿐이다.

그럼에도 불구하고 전통적으로 수학의 선험성은 논리학의 선험성보다는 덜 확실한 것으로 여겨져 왔다. 더욱이 수학의 주 과제 중 하나가 이론의 연역적 발전에 있다는 명백한 사실은 수학의 선험성을 뒷받침해주는 가장 강력한 논거가 되어왔었다. 따라서 일단 우리는 수학을 논리학에로 성공적으로 환원시키는 일은 일단 선험적 지식의 문제를 단순화시켜 주리라는 기대를 할 수 있겠다. 또한 논리학은 우리에게 있어서 수학보다 더 불가결한 것이다. 도대체 우리는 논리적 어휘나 논리규칙에 의거한 추론 없이는 사유를 진행시킬 수조차 없다. 이점이 사실상 논리학이 수학보다 더 기본적이고 보다 확실하게 선험적임을 시사해주는 대목이기도 하다.[8)]

더욱이 역사적으로도, 논리학과는 달리 수학에 대해서는, 이를테면 칸트의 순수직관과 같은 모종의 특수한 인식능력을 설정해야만 그 선험성을 보장받을 수 있다는 견해를 찾아볼 수 있는데, 수학을 논리학에로 환원시켜버리면 이같은 인식론적인 번거로움을 덜어버릴 수 있는 부수적인 효과도 얻을 수 있다. 사실 프레게가 산수학의 진리들이 분석적이라고 했을 때 그는 심리주의자나 형식주의자뿐 아니라 칸트도 겨냥하고 있음을 분명히 밝히고 있다.[9)]

칸트는 분석-종합 구분의 기준을 두 가지로 제시한다. 하나는 판단의 술어개념이 주어개념 속에 포함되어 있느냐 여부에 따른 기준이요 또 하나는 그 판단의 부정이 모순을 포함하느냐 여부에 따른 기준이다. 그런데 칸트가 (기하학과 더불어) 모든 수학의 판단들은 선험적 종합판단이라 하면서 예를 든 '7+5=12'의 경우에서 그는 위의 두 기준 중에서 첫째 기준에만 의거해서 이 판단이 종합판단이라는 논증을 펴고 있다.[10)] 그러나 프레게는 이 첫째 기준을 배척하고 둘째 기준만을 받아들이면서 분석적 참이란 "그것이 참임에 대한 증명에 오직 일반적 논리법칙 및 정의들만 나오는 것"이라고 정의한다.[11)] 프레게가 칸트의 첫째 기준을 배척한 이유는 심리주의를 반대하는 논리와 맥을 같이 하면서 한 가지 방법론적 차이에서 찾아볼 수 있다. 칸트 당시만 해도 논리학은 아리스토텔레스 이래의 주어-술어 논리학으로서, 개념분석의 주관주의적 문제점과 더불어 그 적용범위가 지극히 한정되어 있었다.[12)] 그러나 프레게는 *Begriffsschrift*에서 진리함수적 양화논리를 개발함으로써, 언어적 표현의 의미를 단지 개개의 구성요소들 각각에 대한 개념분석의 차원이 아닌 그 표현 내에서 구성요소들이 차지하고 있는 기능적 측면도 고려하면서 탐구할 수 있는 장치를 마련해 놓았다. 이것을 바탕으로 프레게는, 칸트나 심리주의자, 형식주의자들의 방법론적 결

---

7) 특히 Mill이 이런 오류를 범하고 있다고 비판받는다. *FA* p.13.

8) C.Parsons "Foundations of Mathematics" in *Encyclopedia of Philososlphy* vol.5 p.153.

9) *FA* pp.100~101. 단 기하학이 종합적이라는 점에서는 Frege도 Kant와 견해를 같이 한다.

10) Kant *Kritik der reinen Vernunft* B.15~16.

11) *FA* p.101.

12) D.W. Hamlyn "Analytic and Synthetic Statement" in *Encyclopedia of Philosophy* vol.1 p.106.

함을 상기시키는 자신의 세가지 탐구원리를 「산수학의 기초」 서문에서 제시하고 있다: ①심리적인 것과 논리적인 것의 뚜렷한 구분, 즉 주관적인 것과 객관적인 것의 구분. ②단어의 의미를 그 자체 고립시켜서 탐구하지 않고, 명제의 문맥 내에서만 탐구함.(문맥원리) ③개념과 대상을 구분함.[13]

이제 문제는 산수학을 논리학에로 환원시키는 일이다. 그리고 그 첫 단계는 산수학의 어휘들은 논리학의 어휘들로 번역해주는 일이다. 그런 다음 논리법칙 및 정의들만으로 모든 산수학에서 참인 명제들을 도출해낼 수 있음을 보여주면 일단 프레게의 논리주의 프로그램은 성공적이라 평가를 받을 수 있을 것이다. 프레게는 「산수학의 기초」 후반부에서 첫째 단계를, 「산수학의 근본법칙」에서 둘째 단계를 보여주고 있다. 이제 이 순서를 따라 과연 프레게의 논리주의가 성공적인지를 살펴보기로 하자.

Ⅱ 수에 대한 정의

Ⅱ－1 수 일반에 대한 정의

'말의 의미를 고립적으로 묻지 말고 명제의 문맥 내에서 그 의미를 물어야 한다'는 소위 문맥원리는 일단 수 개념을 정의할 때에도 적용된다. 즉 수가 무엇인지를 탐구할 때에도 수를 가리키는 용어가 나오는 명제의 의미부터 정해야 한다는 것이 프레게의 전략이다. 그런데 수가 무엇인지도 모르는 상태에서 수가 나오는 명제의 의미를 어떻게 정해줄 수 있을까? 이에 대해 프레게는 최소한의 지식만 갖고서도 수에 관한 명제를 주장할 수 있는 경우가 있다고 대답한다. 만일 수를 (속성이 아니라) 대상이라고 가정하기만 한다면 숫적동일성에 관한 주장이 가능하다는 말이다. 즉 'a'와 'b'가 수를 지칭하는 용어일 경우에는 'a=b'라는 명제의 의미는 수가 무엇인지 아직 모르는 상태에서라도 고찰가능하다는 것이다.[14]

그렇다면 숫적 동일성의 문제를 다루기 이전에 우선 분명히 해둘 것이 있다. 과연 수가 (어떤 대상인지는 아직 불분명하더라도) 대상이기는 대상인가? 수에 관한 가장 흔한 견해중 하나는 수가 대상이 아니라 속성이라는 견해이다. 그리고 그 논거로 제시되는 것이 일상언어에서 수를 나타내는 용어들이 속성적으로 쓰인다는 점이다. 그러나 프레게는 일상언어에서 속성적으로 쓰이는 수 표현은 언제라도 서술적으로 바꾸어줄 수 있다는 점에 근거해서 위의 견해를 일축한다. 이를테면 '목성는 네 위성을 갖고 있다'(Jupiter has four moons)는 '목성의 위성의 수는 넷이다'(The number of Jupiter's moons is four)라고 바꾸어 쓸 수 있다. 〔여기서의 '이다'(is)의 의미는 '동일하다'(is identical with) 혹은 '마찬가지다'(is the same as)라는 숫적 동일성의 의미이다.〕[15]

둘째로, 수가 속성이 아니라 독자적인 대상이라고 한다면 왜 우리는 그러한 수를 표상하지 못하는가 라는 반론이 있다. 그러나 이에 대해 프레게는 우리가 어떤 대상을 표상할 수 없다는 사실이 그 대상에 대한 탐구를 불가능하게 만들어야 할 이유도 없거니와[16] 더욱이

13) *FA* p.x

14) *FA* p.73.

15) *FA* pp.68~69.

시공적으로 존재하는 구체적 사물일지라도 항상 표상가능하지는 않다는 점을 들어서 이 반론이 결정적일 수 없다고 대꾸한다. 이를테면 우리가 머리 속으로 그리는 지구의 모습과 실제의 지구와는 전혀 다르지만 그래도 우리는 지구의 실재성을 부인하거나 지구에 대한 탐구를 그치지는 않는다는 점을 프레게는 지적한다.[17]

세째 반론으로서 수가 공간적이지 않다는 반론이 있을 수 있다. 그러나 프레게는 공간적 대상으로서의 수를 말하는 것이 아니다.[18] 모든 객관적 대상이 다 공간적이지는 않다는 게 프레게의 지론이요 특별히 수란 논리적 대상이라는 점을 밝히고자 하는 것이 그의 과제로서 앞으로 이 글에서 핵심적으로 살펴볼 대목이지만, 어쨌든 수 자체에 대한 공간적 직관 표상을 얻겠다는 발상 자체를 프레게는 심리주의적 태도라고 비난하며, 문맥원리에도 위배되는 것임을 지적하고 있다.[19]

이제 다시 숫적 동일성의 문제에로 돌아가자.[20] 숫적 동일성 명제는 무엇을 주장하는가? 이를테면 '목성의 위성의 수가 넷이다'라는 명제는 '목성의 위성의 수'라는 개념에 해당하는(밑에 드는, unterfallen, fall under) 네개의 대상이 존재한다는 말이다. 어떤 한 부류의 대상들의 수가 다른 한 부류의 대상들의 수와 같다는 말은, 한 개념에 해당하는 대상들의 수와 다른 개념에 해당하는 대상들의 수가 곧 그 개념에 속하는 (zukommen, belong to) 수이다. 하여 숫적 동일성 명제의 의미를 정하는 일은 곧 '개념 F에 속하는 수가 개념 G에 속하는 수와 같다'라는 명제의 의미를 정하는 일이 된다.

문제는 우선 위의 명제와 같은 의미를 가지면서 '수'(개념 F의 '수', 또는 개념 G의 '수')라는 표현을 쓰지 않는 명제는 찾는 일이다. 그래야만 수의 동일성에 대한 일반적 기준을 부여해줄 수 있게 되고 그럼으로써 대상으로서의 수의 동일성 관계에 대한 기준은 그 이전에 '동일성'이라는 말의 의미부터 정해져야만 비로소 제시될 수 있다. 여기서 프레게는 별도의 독자적인 기준을 제시하는 대신에 라이프니쯔의 동일성 기준을 원용한다. "진리치를 보존하면서 어느 한쪽을 다른 쪽으로 대치할 수 있는 것들은 서로 같다" ['같다' (dasselbe, the same)라는 말은 모든 면에서 완전히 일치할 때에 쓰이며, '동일하다' (gleich, identical)는 특정의 관련된 측면에서 일치할 때 쓰인다.]

프레게는 이 기준을 구체적인 사례들에 적용시켜서 풀이해보고 있다. 이를테면 '평행' 관계를 보자. 선분 a와 선분 b가 평행이라는 관계는 일종의 동일성 관계라고 볼 수 있다. 즉 이 말은 선분 a의 방향과 선분 b의 방향이 동일하다는 말이다. '닮음'관계도 마찬가지다. 두 삼각형이 닮았다라는 말은 두 삼각형의 모양이 동일하다는 말이다. 그렇다면 방향의 동일성이나 모양의 동일성의 경우처럼 수의 동일성의 경우에서도, '개념 F에 속하는 수가 개념 G에 속하는 수가 동일하다'라는 명제 대신에 '개념 F와 개념 G가 모종의 R이라는 관계에 있다'라는 명제를 대치시킬 수 있어야 할 것이다. 즉, 수가 동일하다는 말은 어떤 측면(관계)에서 동일하다는 말인지가 핵심적인 문제가 된다. 이는 우리가 두 부류의 대상들의 수가 동일하다라는 숫적 동일성 명제를 주장하게 되기까지 그 대상들에 대해 어떤 조작

---

16) *FA* p.70

17) *FA* p.71.

18) *FA* p.72.

19) *FA* p.71.

20) 以下의 내용은 *FA* pp.73~79를 요약한 것이다.

과정을 적용시키는지를 반성해보면 쉽게 대답이 된다. 두 대상들의 수가 같은지 다른지는 세어보면 안다. 그런데 이 셈의 과정에 반드시 수 개념이 선행해야 하는 것은 아니다. 이를 테면 커다란 식탁 위에 포크와 나이프들이 있을 때 포크의 수와 나이프의 수가 같은지 아닌지는 각각의 포크와 나이프가 모두 짝이 맞추어져 있는지 아니면 짝이 맞지 않은 채 남아 있는 포크 혹은 나이프가 있는지만 살펴보면 된다. 다시 말해서 포크의 수가 몇이고 나이프의 수가 몇인지 그 구체적인 수를 모른다 해도 포크의 수와 나이프의 수가 같은지 여부는 알 수 있다. (무엇을 개개의 포크라 간주하며 무엇을 개개의 나이프라고 간주할 것이냐의 개별화의 문제는 일단 여기서는 논외로 한다.) 어쨌든 각각의 나이프를 각각의 포크에 대해서 짝을 맞추어주는 이 셈이라는 조작과정은 나이프와 포크를 서로 일대일 대응관계를 설정해주는 과정이며, 바로 이 일대일 대응관계가 숫적 동일성 명제를 주장할 때 그 동일성의 기준이 되는 관계이다. '일대일 대응관계'라는 말에 일이라는 숫자가 등장한다고 해서 숫적 동일성에 대한 정의가 순환적이 되리라고 우려할 필요는 없다. 일이라는 수를 쓰지 않고도 이 관계는 다음과 같이 다시 정의될 수 있기 때문이다: '일반적으로 x가 y에 대하여 어떤 관계가 있으며 x이외의 x′이 y에 대해 이 관계가 없고, 또한 x는 y이외의 y′에 대하여 이 관계가 없을 경우, 오직 그 경우에만 x와 y는 일대일 대응관계에 있다.'[21]

따라서 '개념 F에 속하는 수가 개념 G에 속하는 수가 동일하다'는 명제는 'F와 G가 일대일 대응관계에 있다'와 동치이며, 이것이 곧 수에 대한 동일성 기준이 된다.

그러나 이것은 '숫적 동일성'에 대한 기준일뿐 수가 무엇이냐에 대한 대답은 아니다. 그렇다면 수의 정의는 어떻게 이루어지는가? 프레게는 여기서 평행 관계에 대한 앞서의 비유를 원용한다. 만일 선분 a와 선분 b가 평행이면, '선분 a에 평행인 선분'이라는 개념의 외연은 '선분 b에 평행인 선분'이라는 개념의 외연과 동일하다. 역으로 위의 두 개념들의 외연이 서로 동일하다면 선분 a와 선분 b는 평행이다. 다시 말해서 "'a와 평행인'이라는 개념의 외연은 'b와 평행인'이라는 개념의 외연과 동일하다"라는 명제는 "a의 방향은 b의 방향과 동일하다"라는 명제와 동일한 진리조건을 갖는다. 그래서 "a의 방향"은 "'a와 평행인'이라는 개념의 외연"이라고 정의할 수 있다.

수의 경우에도 마찬가지의 방법을 적용시켜 정의를 내릴 수 있다. "F에 속하는 수"는 "'F와 일대일 대응관계에 있음'이라는 개념의 외연"이라고 정의할 수 있다. 즉, 다음 두 명제는 진리조건이 같다.

(1) F에 속하는 수와 G에 속하는 수가 동일하다.

(2) 'F와 일대일 대응관계에 있음'이라는 개념의 외연은 'G와 일대일 대응관계에 있음'이라는 개념의 외연과 동일하다.

'일대일 대응관계에 있음'이 곧 '동수임'(equinumerous)에 대한 정의이었으므로 편의상 (2)는 다음과 같이 줄여서 말할 수 있다.

(3)'F와 동수인'이라는 개념의 외연은 'G와 동수인'이라는 개념의 외연과 동일하다.

이상으로 "'개념 F에 속하는' 수"는 "'개념 F와 동수인'이라는 개념의 외연"이 되어서 결국 "수"란 "개념의 외연"이라고 정의된다.[22]

---

21) 러셀의 정의이다. B. Russell *Introduction to Mathematical Philosophy* p.15

22) *FA* p.85.

Ⅱ-2 개개의 수들에 대한 정의

수 일반에 대한 정의를 한 다음 프레게는 개개의 수들에 대한 정의를 보여준다. 어떤 수가 된다는 말은 어떤 개념 F에 대하여 '그 개념 F와 동수인'이라는 개념의 외연이 된다는 말이었다.

그러면 먼저 0을 정의해보자. 0이라는 수는 그 외연 속에 어떤 대상도 속하지 않는 바로 그러한 개념에 적용되는 수라 할 수 있다. 그러한 개념으로서 도대체 어떤 개념이 있을 수 있을까? 프레게는 그 후보로서 '그 자신과 동일하지 않은'이라는 개념을 들고 있다. 그 자신과 동일하지 않은 것은 하나도 없을 것이기 때문이다. 따라서 "0"이란 "'그 자신과 동일하지 않은'이라는 개념에 속하는 수"가 된다. 여기서 다시 '수'(Number)라는 용어를 쓰지 않고 정의하면 다음과 같이 된다.

0이란 '그 자신과 동일하지 않은'이라는 개념과 동수인(equinumerous) 개념의 외연이다.[23)]

이처럼 수 일반에 대한 정의 및 0에 대한 정의가 이루어진 다음에 프레게는 후자(successor) 관계에 대한 정의를 시도한다. 새삼 말할 것도 없이 페아노의 자연수론에 나오는 다섯 가지 공리 속에 포함되어 있는 세 가지 무정의용어 중에서 '수'와 '0'에 대한 정의가 완료되었으므로 '후자'에 대한 정의만 완료되면 적어도 자연수론에 한해서만큼은 프레게가 바라던 논리주의적 공리체계화가 가능함을 보여줄 수 있을 것이다.[24)]

프레게는 자연수열에서 서로 이웃해 있는 두 수의 관계를 다음과 같이 정의할 것을 제안한다.

"다음과 같은 어떤 개념 F 및 그 개념 F에 해당하는 x, 즉 개념 F에 속하는 수가 n이고 'F에 해당하지만 x와 동일하지는 않은'이라는 개념에 속하는 수가 m이 되는, 그러한 개념 F와 대상 x가 존재한다"라는 명제는 "n이 자연수열에서 m 바로 뒤에 나온다"라는 명제와 같은 의미이다.[25)]

이는 다음과 같이 그 뜻을 풀이할 수 있다. m과 n이 수이고 n이 m의 다음 수라 하자. n이 수이므로 n은 '어떤 개념 F에 대하여 그 개념 F와 동수인'이라는 개념의 외연이 된다. n은 다른 수 m보다 크므로(뒤에 나오므로), n은 0과 같지 않다. 그래서 개념 F는 그에 해당하는 대상을 적어도 하나 가져야만 한다. 그 대상을 x라 하자. 그러면 'F에 해당하지만 x와 동일하지는 않은'이라는 개념에는 x를 제외한 모든 F에 해당하는 것들이 해당할 것이다. 그런데 'F에 해당하지만 x와 동일하지는 않은'이라는 개념에 속하는 수는 곧 "'F에 해당하지만 x와 동일하지는 않은'이라는 개념과 동수인(equinumerous)"이라는 개념의 외연이다. 그리고 개념 F와 동수인 개념의 외연보다 하나 적은 대상들을 그에 해당하는 것으로 갖는 모든 개념에 대하여 그 수가 성립한다. 바로 이것이 n의 바로 앞수라고 하는 m이다.

이와 같이 일단 0과 후자 관계가 정의되면 그 밖의 모든 개개의 수에 대한 정의가 가능

---

23) *FA* p.87.

24) 프레게의 산수학의 기초가 페아노의 공리보다 5년 먼저 나왔지만 이것은 비형식적 작업이고, 형식적 공리체계화는 산수학의 근본법칙 제1권(1993)에서야 이루어졌다.

25) *FA* p.89.

하다. 이를테면 '0과 동일한'이라는 개념에는 딱 하나의 대상, 즉 수 0이 해당한다. 바로 이 '0과 동일한'이라는 개념에 속하는 수가 수 1이다.[26] 왜 그런지 다음 명제를 보자.

"'0과 동일한'이라는 개념에 속하는 수가 n이고 '0과 동일하지만 0과 동일하지는 않은'이라는 개념에 속하는 수가 n이 되는, 바로 그와 같은 개념인 '0과 동일한'이라는 개념 및 이 개념에 해당하는 대상 0이 존재한다."

이 명제에 나오는 수 m과 n은 어떤 수인가? m은 "'0과 동일하지만 0과 동일하지 않은'이라는 개념에 해당하는"이라는 속하는 수이다. 분명 어떤 대상도 이 개념에 해당하지 않는다. 따라서 이 개념에 속하는 수는 0이다. 한편 n은 '0과 동일한'이라는 개념에 속하는 수이다. 이 개념에는 딱 하나만이 해당된다. 즉 수 0이 바로 이 개념에 해당하는 유일한 것이므로 n은 수 1이다. 그런데 앞서의 후자 관계에 대한 정의에 비추어 볼 때 위의 명제는 n이 m 바로 다음에 나온다라는 명제와 같은 의미이니, 수 1이 수 0의 바로 다음 수임을 알 수 있다.

Ⅲ. 논리적 대상－치역

Ⅲ－1 함수와 대상

프레게는 수를 개념의 외연이라고 정의함으로써 수가 속성이나 개념이 아닌 대상임을 분명히 하고자 했다. 그렇다면 개념의 외연은 어떤 의미에서 대상이라고 간주되는가? 「산수학의 기초」에서는 이점을 해명해두지 않았다. 이 문제는 그 이후에 발표된 일련의 논문, "함수와 개념"(1891), "개념과 대상에 관하여"(1892) 등에서 본격적으로 다루어지고 있다.

이미 「산수학의 기초」에서 수를 정의할 때에도 언급이 있었지만[27] 프레게는 대상인 것(entity being an object)과 대상이 아닌 것(entity not being an object)을 구분하는 한 가지 근거를 동일성 명제를 주장할 수 있는지 여부에서 찾는다. 그에 따르면 대상에 관해서는 동일성 명제를 주장할 수 있고 대상 아닌 것에 관해서는 그럴 수 없다. 그리고 그 이유는, 대상은 완전한 것인 반면 대상 아닌 것은 불완전한 것이기 때문에 대상 아닌 것에 대해서는 아직 같다 다르다 등의 동일성 여부를 식별할 형편이 안된다는 것이다. 이 불완전한 것, 즉 대상이 아닌 것을 프레게는 함수라고 불렀다.

그렇다면 대상으로서의 개념의 외연이 무엇인지 알려면 그와 대비되는 것으로서의 함수의 본성을 알아야 한다. 도대체 함수란 무엇이며 함수가 불완전하다 함은 무슨 뜻인가?

함수라는 개념은 이미 *Begriffsschrift*에서부터 도입되었다.[28] '수소는 이산화탄소보다 가볍다'라는 표현을 보자. 이 표현에서 '수소'라는 기호 대신에 '산소'나 '질소' 등의 기호를 대치시켜주면 그 의미가 바뀐다. 그런데 원래의 표현에서 '수소'라는 표현이 그 원래의 표

26) *FA* p.90.

27) *FA* p.68.

28) *Begriffsschrift* in *From Frege to Gödel* ed. by van Heijenoort pp.21~23.

현에서의 다른 부분들에 대해서 성립하던 관계에 '산소'나 '질소'로 대치되어도 변함 없이 남아있는 부분이 있다. 바로 이 불변적 요소가 함수이며, 대치가능한 요소가 그 함수의 자변수(argument)라고 구분된다. 따라서 이 구분은 기호 차원에서의 구분으로서 어디까지나 구문론적 구분이다. 구문론적 구분이기 때문에 함수와 대비되는 개념으로서 자변수가 대상이라고 보아야 할 이유는 전혀 없다.

프레게의 함수 개념은 "함수와 개념"이라는 논문에서부터 *Begriffsschrift*에서와는 다른 의미로 본격적으로 등장한다. 이 때부터 프레게는 함수는 기호가 아니라 기호가 뜻하는 바임을 분명히 한다. 그는 함수를 기호 내지 언어적 표현과 동일시하는 것이 잘못임을 수학에서의 함수라고 불리는 것에 대한 분석을 통해 보여주고 있다. 수학에서의 전형적인 함수는 소위 '변항'(variable)을 포함하는 '식'(expression)이라고 간주되고 있다. 이를테면 '$2 \cdot x^3+x$'는 x의 함수이고, '$2 \cdot 2^3+2$'는 2의 함수라고 간주된다. 그럼으로써 함수란 곧 '변수'(varible number)라고 결론을 내리게 되는데, 프레게에 따르면 각각의 수들은 어디까지나 확정된 존재(definite entity)이며 변동될 수 있는 수(즉,변수)란 존재할 수 없다. 그에 따르면 소위 수학적 함수에 등장하는 변항 'x'는 함수 자체의 어느 한 부분을 이루고 있는 무엇인가를 나타내는(represent) 것이 아니다. 그저 x란, 그 함수에 어떤 수가 도입되면 다른 어떤 수를 얻을 수 있도록, 수가 도입되어 채워져야 할 자리를 표시하고(indicate) 있을 따름이다. 따라서 x가 변수라는 혼란을 피하기 위해서 '$2 \cdot x^3+x$'라는 형태의 표현 대신에 차라리 '$2 \cdot (\ )^3+(\ )$'라고 쓰는 것이 낫다.[29] 이 표현의 빈칸 ( )에 수를 나타내는 표현, 예컨대 1을 삽입하면 우리는 새로운 표현, 즉 '$2 \cdot 1^3+1$'을 얻게 되며 이 표현은 곧 3이라는 수를 지칭하는 것이 된다. *Begriffsschrift*에서 함수라고 불렀던 것이 바로 이 '$2 \cdot (\ )^3+(\ )$'와 같은 표현이었던 바 이제부터 이런 표현은 그 자체가 함수로 간주되는 것이 아니라 함수를 나타내는 표현(함수적 표현)이라고 간주된다. 그러면 함수적 표현이 나타내는 함수란 무엇인가?

함수에 관하여 확실하게 말할 수 있는 사항은 그것이 "불완전한", 혹은 "채워지지 않은" 것이라는 점 뿐이다.[30] 함수에서 채워지지 않은 부분을 채워주는 것을 프레게는 자변수(argument)라고 불렀다. 함수에 자변수가 채워짐으로써 불완전한 것으로부터 완전한 것이 되면 그것은 더이상 함수가 아니다. 불완전한 것인 함수가 완전한 것으로 되었을 때 그것을 함수값이라 한다.

통상 수학적 함수에서는 자변수와 함수값이 모두 수로 되어 있다. 그러나 프레게는 함수를 보다 넓은 의미로 쓰고 있다. 자변수나 함수값이 수가 아닌 것들도 함수에 포함된다. 이를테면 '$(\ )^2=1$'이라는 함수적 표현을 보자. 빈칸에 자변수로서 수를 대입해보자. $1^2=1$, $2^2=1$, $3^2=1$……등등의 표현을 얻을 수 있을 것이다. 이 표현들은 문장이다. 첫째 문장은 참이고 나머지는 거짓이다. 위의 함수적 표현에 자변수로서 수를 대입해보면 참 또는 거짓이라는 함수값이 나온다. 이번에는 자변수도 수가 아닌 경우를 보자, '( )은 한국의 수도이다'에서 빈칸에 '서울', '부산', '대구', '이순신', '3', '평화' 등을 자변수로 삽입해보자. 그 결과는 '서울'을 자변수로 넣었을 때만 참이라는 함수값이 나온고, 그 밖의 경우에는 거짓

29) "Function and Concept" in *Philosophical Writings of Gottlob Frege* by P. Geach & M. Black p.24.

30) "Function and Concept" p.31.

이라는 함수값이 나온다. 이처럼 자변수가 수이든 수가 아니든 상관없이 함수값으로서 참 혹은 거짓이라는 진리치만을 취하게 되는 함수를 프레게는 개념이라고 규정한다.

수나 진리값 이외에도 함수는 또다른 종류의 함수값을 취할 수 있다. 이를테면 '( )의 수도'라는 표현의 빈칸에 한국이라는 자변수를 채워주면 함수값은 베를린이 된다. 그렇다면 여기서 한가지 문제가 제기된다. 위의 빈칸에 자변수로서 한국이나 중국 대신에 예컨대 3을 채워주면 함수값은 어떻게 되는가? 여기서 프레게는 모든 함수는 어떤 자변수가 채워지더라도 함수값을 갖게 되도록 정의되어야 할 것을 요구하고 있다. 다시 말해서 잘 정의된 함수는 어떤 경우에라도 함수값을 가질 수 있다는 것이다. 이를테면 'x+y'라는 함수는 이 함수에 자변수로서 수 이외의 것이 채워지면 그 함수값은 언제나 0이 된다라고 정의해줄 수 있다. 물론 0 대신에 1이라는 함수값을 취한다고 정의해줄 수도 있다. 어떤 함수값을 선택하느냐가 중요한 문제가 아니라 "언제나 함수값이 존재해야 한다는 점이 핵심"[31]이다. 특별히 진리값을 함수값으로 취하는 함수인 개념의 경우에는 그 개념이 엄격하게 한정되어 있어야 한다. 그렇지 않으면 개념에 관한 논리법칙을 설정할 수 없다. 이를테면 '( )은 한국의 수도이다'에서 빈칸에 '이순신'이라는 자변수를 채워주었을 때 그 값이 참도 거짓도 아니라고 해버린다면 '이순신은 한국의 수도가 아니다'의 경우에도 마찬가지가 된다. 논리주의자들이 다 그러하듯이 프레게도 모든 문장 P에 대해서 P가 참이거나 ~P가 참이거나라는 배중율이 논리법칙으로 보존되어야 한다고 여겼기 때문에 개념 정의에서의 엄밀성을 요구했던 것이다.[32] 문제는 잘 정의된 개념이라면 어떤 자변수에 대해서든 확정된 함수값을 가질 수 있는냐일텐데 이 문제는 다음 장에서 러셀의 역설을 검토할 때까지 일단 접어두기로 하자.

앞장에서 수가 개념의 외연이라고 정의되었고 이 장에서의 과제는 왜 개념의 외연이 대상이라고 간주되는지를 알아보자는 것이었다. 그런데 지금까지 살펴본 바로는 개념이란 함수의 일종으로서 특별히 진리값을 그 함수값으로 갖는 함수이었다. 그래서 개념의 외연이란 진리값을 함수값으로 갖는 함수의 외연이 된다. 이 함수의 외연을 프레게는 치역(wertverläufe, courses of value, range of value)라고 불렀다. 그렇다면 프레게가 말하는 치역이 대상, 그것도 논리적 대상임이 보여질 수만 있다면 수가 대상임도 따라서 드러나게 될 것이다. 다음 절에서 이 문제를 살펴보기로 하자.

Ⅲ-2 치역

"함수와 개념"에서 프레게는 동일한 자변수에 대해서 동일한 함수값을 취하는 함수는 치역도 동일하다고 말한다. 이 대목은 그대로 인용해 보자

> '$x^2-4x=x(x-4)$'라고 쓸 때 우리는 한 함수와 다른 함수가 같다(equal)고 놓은 것이 아니라, 그 함수들의 값이 같다고 놓은 것일 따름이다. 그리고 이 등식을, 어떤 자변수를 x 대신에 대치해도, 타당하다고 이해한다면, 우리는 등식의 일반화를 표현한 것이다. 따라서 우리는 치역간의 등식을 얻게 된다. 함수값간의 등식의 일반화를 치역간의 등식의 일반화로 간주하는 것이, 나로서는 증명가

---

31) "Function and Concept" p.33.

32) G.Currie *Frege:An Introduction to his Philosospohy* p.65.

능하다고 보이지 않고, 논리학의 근본법칙으로 간주되어야 한다고 여겨진다.[33]

위의 인용문은 후에 「산수학의 근본법칙」에서 소위 치역공리하고 하는 제5공리로 등장한다. 'f(x)'가 함수의 이름이라고 하고 '$\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$'을 그 함수에 대응하는 치역의 이름이라고 할 때 제5공리는 다음과 같이 표기된다.

$$(\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)=\grave{\alpha}g(\alpha))=(\neg\!\smile^{\!\mathfrak{a}}\!\!-f(\mathfrak{a})=g(\mathfrak{a}))$$ [34]

프레게는 이 치역공리를 통하여 치역을 도입했지만 이것은 어디까지나 공리일 뿐 치역에 대한 정의는 아니다. 도대체 치역이란 무엇인가? 이를 위하여 '개념의 외연'이란 말의 의미에 대한 직관적 이해로부터 시작해보기로 하자. 통상 개념이란 대상들을 두 부류로 구분시켜주는 것이라고 볼 수 있다. 이를테면 '학생임'이라는 개념은 대상들을 학생인 대상들과 학생이 아닌 대상들로 구분해준다. 이런 식으로 해서 어떤 대상을 취해서 그 대상이 학생이면 '( )은 학생임'이라는 함수의 값을 참이라고 하고 학생이 아니면 이 함수의 값을 거짓이라고 놓는다. 그래서 만일 어떤 자변수에 대응하는 값이 참이 되면 그 자변수가 그 개념에 해당한다(fall under)고 하고 거짓이 되면 해당하지 않는다라고 한다.[35] 그랬을 때 개념의 외연을 일종의 순서쌍들의 집합이라고 볼 수 있겠다. 즉 '( )은 학생임'이라는 개념의 외연은 (甲, 참), (乙, 참), (丙, 거짓), (丁, 참)……등의 순서쌍들의 집합이라고 이해할 수가 있겠다. 함수의 외연인 치역도 마찬가지로 정의할 수 있다. '( )의 수도'의 치역이란 (한국, 서울), (일본, 동경), (미국, 워싱톤), ……(장미꽃, X), (이순신, X)……등등의 순서쌍으로 된 집합이라고 볼 수 있을 것이다. 그러나 사실 프레게는 치역을 이같이 순서쌍들의 집합으로 정의하지 않았다. 러셀을 비롯한 대부분의 사람들이 프레게가 말하는 '개념의 외연'을 '집합'과 동일시 했으며,[36] 또 그렇게 해야 치역에 대한 직관적 이해가 가장 쉽게 드러날 수 있음에도 불구하고 프레게는 '개념의 외연'과 '집합'을 동일시하는 데에 반대했다. 그에 따르면 치역의 집합에로의 환원은 다시 '집합이란 무엇인가'의 문제를 초래할 뿐이며, 특히 대상들의 집합으로부터 추상에 의하여 수를 얻는다는 칸토르 이래의 집합관에서는 수를 대상이 아닌 개념으로 파악하게 할 뿐이라는 것이다.[37] 하여 프레게는 치역에 대한 명시적 정의 대신에 치역공리를 통하여 치역을 도입하면서, 치역공리가 그의 해석체계 내에서의 모든 함수에 대하여 그 함수의 치역을 고유하게 일의적으로 결정해주는 역할을 성공적으로 수행하기만 하면 치역이라는 논리적 대상의 존재를 입증하는 것이 되리라고 여겼다. 왜냐하면 치역공리는 동일성 명제의 형식을 띠고 있고 동일성 관계는 오직 대상에 대해서만 주장될 수 있기 때문이다.[38]

이리하여 '개념의 외연'이라고 「산수학의 기초」에서 정의되었던 '수'는 '함수의 외연'으로서의 '치역'과 동일시되고 '치역'이 논리적 대상이라고 간주될 수 있는지 여부는 동일성 명

33) "Function and Concept" p.31.

34) *The Basic Laws of Arithmetic* trans. by M. Furth p.36.

35) "On Concept and Object" in P. Geach & M. Black p.44.

36) Russell *The Principles of Mathematics*, Dummett *Frege: Philosophy of Language* Introduction xi, Currie *Frege: An Introduction to his Philosophy* p.68.

37) *FA* pp.38~39.

38) "Function and Concept" pp.26~27.

제의 형식으로 되어 있는 치역공리에 의하여 모든 함수의 치역이 일의적으로 결정될 수 있는지 여부에 의존하게 되었다. 만일 「산수학의 근본법칙」의 체계가 일관적이고 따라서 모든 함수에 대하여 그 치역이 확정될 수만 있다면 산수학의 모든 진리들은 논리적 진리들이라는 프레게의 논리주의가 타당한 입론으로 받아들여질 수 있을 뿐만 아니라 수가 개념이 아닌 대상이라는 「산수학의 기초」에서의 주장도 아울러 정당화될 수 있을 것이다. 그러나 이같은 프레게의 희망은 「산수학의 근본법칙」 제2권이 미처 출간되기도 전에 러셀이 발견한 역설에 의해 무산되어 버렸다.

Ⅳ 러셀의 역설과 논리주의의 실패

Ⅳ-1 러셀의 역설

이른바 러셀의 역설은 두 가지 해석방식에 의하여 도출될 수 있다.[39] 하나는 술어적 역설이요 다른 하나는 집합적 역설이다. 먼저 술어적 역설을 보자. 이 역설의 대표적인 사례로서 '그 자신의 술어가 될 수 없는'이라는 술어가 있다. 이 술어를 w라 하자. w는 그 자신의 술어가 될 수 있는가? 그렇다고 가정해보자. 그러면 w는 원래 '그 자신의 술어가 될 수 없는'이라고 정의되어 있었는데 이제 그 자신의 술어가 될 수 있다는 가정은 정의와 모순된다. 그렇다면 w는 그 자신의 술어가 될 수 없다고 가정해보자. 그런데 바로 이 가정 속에서 '그 자신의 술어가 될 수 없는'이 w에 대한 술어가 되고 있다. 따라서 '그 자신의 술어가 될 수 없는'이라는 술어가 '그 자신의 술어가 되고 있는' 모순을 초래한다. 그래서 어느 쪽으로 가정하든 모순이 나온다.

그러나 이 술어적 역설은 프레게의 이론에는 적용되지 않는다. 프레게의 논리체계 상으로 술어는 결코 자기 자신에 대해 술어가 될 수 없다. 프레게는 함수의 위계를 구분함으써 어떤 함수도 결코 자기 자신의 자변수가 될 수 없도록 예방해두었다.[40] 따라서 프레게의 체계에서는 'p(p)'나 'not-p(p)' 등의 표현은 무의미한 표현이 된다.

그러나 러셀의 역설에 대한 두번째 해석, 즉 집합적 역설의 경우에는 사정이 달라진다. 모든 집합은 그 자신을 원소로 포함하는 집합과 그 자신을 원소로 포함하지 않는 집합으로 나뉠 수 있다. 전자의 집합을 비정상집합이라 하고 후자의 집합을 정상집합이라 하자. 그런데 모든 정상집합들만을 원소로 포함하는 집합—이 집합을 C라 하자—은 정상집합인가 아닌가의 문제에서 역설이 발생한다. 먼저 C가 정상집합이라고 (C는 C 자신의 원소로 포함되어 있지 않다고) 가정해보자. 그렇다면 C는 정상집합이라고 가정된 자기 자신은 원소로 포함하고 있지 않으므로 모든 정상집합들을 원소로 포함하는 집합이 C라는 원래의 정의와 모순된다. 반대로 C가 비정상집합이라고 (C가 C 자신의 원소로 포함되어 있다고) 가정해보자. 그렇다면 정상집합들만을 원소로 포함하는 집합이어야 한다는 원래의 정의와는 달리 비정상집합인 C도 C 속에 포함되는 결과가 되어 역시 모순을 초래한다.

39) Russell *The Principles of Mathematics* pp.101~107

40) *The Basic Laws of Arithmetic* §§21~22.

이 집합적 역설이 프레게의 경우에는 어떻게 적용되는가? 러셀의 이론에서의 집합에 해당하는 프레게적인 용어는 개념의 외연이다. 그래서 러셀의 정상집합에 대응하는 형태를 한 가지 구성해보기로 하자.[41] '어떤 개념의 외연이지만 그 개념에 해당하지 않는'이라는 개념을 생각해보자. 그리고 이런 개념에 해당하는 외연을 정상외연이라 하고, 이런 외연은 '정상외연'이라는 개념에 해당한다고 하자. 이런 개념을 F라고 하고 이런 개념의 외연을 a라 하자. 그런데 한 개념의 외연은, 각각의 대상이 그 개념에 해당하든가 또는 해당하지 않는다라는 의미에서 확정적이어야 한다. 특별히 a 자신도 F에 해당하든가 해당하지 않든가 중의 하나이어야 한다. a가 F에 해당한다고 가정해보자. 그러면 a는 '정상외연'이라는 개념에 해당하므로 원래의 정의에 따라 a는 F에 해당하지 않는다. 반면에 a가 F에 해당하지 않는다고 가정하면 어떻게 되는가?

그러면 a는 "'정상외연'이라는 개념에 해당하지 않는"이라는 원래의 정의에서 주어졌던 조건을 만족시키고 있으므로 a는 F에 해당하게 된다. 즉 어느 쪽으로 가정해도 모순이 생긴다.

왜 술어적 역설과는 달리 집합적 역설은 프레게의 경우에도 적용되는가? 그것은 러셀의 집합에 대응하는 존재가 프레게의 경우에는 개념의 외연(즉, 치역)이고 이는 곧 대상이기 때문이다. 대상은 함수와 달리 상이한 위계로 나누어지지 않는다. 따라서 역설을 벗어날 수 없다. 이같은 사실은 프레게의 이론에 어떤 영향을 미치며, 그것을 벗어날 수 있는 길은 없는지를 보기로 하자.

Ⅳ-2 프레게의 제5공리

「산수학의 근본법칙」 제1권 §§54~55, 91에 증명되어 있는 정리1에 따르면 각각의 개념 f에 대하여 그 개념의 외연이 되는 대상이 대응한다. 프레게 자신의 표기법에 따라 이를 다시 쓰면 다음과 같다: 만일 b가 $f(\xi)$라는 개념의 외연이라면(즉, $b=\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$이라면) 'a가 f에 해당한다'는 '$a\cap b$'라고 써주고 'a가 f에 해당하지 않는다'는 '$a \pitchfork b$'라고 써주기로 하자. 정리 1은, 각각의 a에 대해서, $a\cap\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$이면 $f(a)$이고 $f(a)$이면 $a\cap\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$라는 말이다.

그런데 여기서 개념 f의 자리에 앞서 말했던 '정상외연'(F)이라는 개념을 대치하고 a가 그 개념 F의 외연이라고 하며 이를 $\grave{\varepsilon}(\varepsilon\pitchfork\varepsilon)$라고 써주기로 하자. 그러면 a는 F에 해당하고 정리 1에 의해 $a\pitchfork\grave{\varepsilon}F(\varepsilon)$, 즉 $a\cap\grave{\varepsilon}(\varepsilon\pitchfork\varepsilon)$이다. 그런데 $a=\grave{\varepsilon}(\varepsilon\pitchfork\varepsilon)$이므 $a\cap a$가 된다. 그러므로 a는 정상외연이 아니다. 이번에는 반대로 a가 정상외연이 아니라 가정해보자. 그러면 a는 F에 해당하지 않으므로 $a\pitchfork\grave{\varepsilon}(\varepsilon\pitchfork\varepsilon)$, 즉 $a\pitchfork a$이다. 그러므로 a는 정상외연이다. 어느 쪽으로 가정하든 자가당착에 빠지므로 정리 1은 참일 수 없다.

이처럼 참일 수 없는 정리를 도출해낸 체계는 분명 어딘가에 잘못이 있다. 하여 프레게가 증명없이 자명한 것으로 간주했던 소위 치역공리(「산수학의 근본법칙」의 제5공리)가 그 자명성을 의심받게 되었다. 치역공리에 따르면 만일 어떤 두 개념의 외연이 동일하다면, 그

41) Currie의 *Frege: An Introduction to his philososphy* pp.129~132 참조. 러셀의 역설이 다 그러하듯이 비술어적(impredicative)으로 정의되는 개념의 외연은 어느 것이나 프레게 체계의 부정합성을 증명하는데 이용될 수 있으며, 프레게 체계의 모순에 대한 최초의 형식적 증명은 프레게 자신에 의해 발표되었다. *The Basic Laws of Arithmetic* Appendix Ⅱ.

에 대응하는 개념들은 동일한 자변수에 대해 동일한 값을 갖는다. 그래서 만일 어떤 개념 f와 g가 동일한 외연을 갖지만 어떤 a에 대해서 $f(a) \neq g(a)$인 경우가 있음을 밝힐 수만 있다면 치역공리는 거짓임이 드러나게 될 것이다.

우선 다음 두 명제를 가정해보자.

(1) 만일 a가 어떤 개념 f의 외연이라면, a는 그 개념 f에 해당한다.
(2) a는 '어떤 개념의 외연이지만 그 개념에 해당하지 않는'이라는, 즉 '정상외연'이라는 개념의 외연이다.

(2)에 따르면 a는 '정상외연'이라는 개념의 외연이다. 이 개념을 F라 하자. 그런데 (1)에 따르면 a는 이 개념 F에 해당해야 한다. 그런데 이것을 곧 a가 '정상외연'이라는 개념에 해당하지 않는다는 말이다. 그러므로 a는 F의 외연이면서 F에 해당하지 않는다. 그러므로 (1), (2)로부터 다음의 (3)이 도출된다.

(3) 만일 a가 다음과 같다면, 즉 a가 어떤 개념 f의 외연이면 a는 f에 해당하는 그러한 a라면, a는 '정상외연' 개념의 외연이 아니다.

(3)은 곧 만일 (1)이라면 (2)가 아니다라는 의미이다. 이 (3)에 가정 (2)를 결합시키면 후건부정(Modus Tollens)의 규칙에 따라서 다음의 (4)를 얻게 된다.

(4) 만일 a가 '정상외연'이라는 개념의 외연이라면, a가 어떤 개념의 외연이면서 그 개념에 해당하지 않는, 그러한 개념이 존재한다.

그런데 a를 '정상외연'이란 개념의 외연이라고 가정하면 (4)에 의하여 a가 어떤 개념의 외연이면서 그 개념에 해당하지 않게 되는 그러한 어떤 개념 f가 존재한다. 그런데 우리는 a를 '정상외연'이라는 개념의 외연이라고 가정했고, '정상외연'이라는 개념을 F라고 했으므로, 우리는 a를, 프레게의 표기법에 따라 '$\grave{\varepsilon}F(\varepsilon)$'라고 써줄 수 있다. 그러면 (4)는 다음의 (5)처럼 다시 써줄 수 있다.

(5) 만일 $\grave{\varepsilon}F(\varepsilon)$가 '정상외연'이라는 개념의 외연이라면 $F(\grave{\varepsilon}F(\varepsilon))$이다.

그런데 $\grave{\varepsilon}F(\varepsilon)$은 '정상외연'이라는 개념의 외연이므로, 전건긍정(Modus Ponens) 규칙에 따라서 다음의 (6)을 얻는다.

(6) $F(\grave{\varepsilon}F(\varepsilon))$

이것으로써 우리는 F가 그 자신의 외연인 $\grave{\varepsilon}F(\varepsilon)$, 즉 a에 대해서 성립하는 개념임을 보였다. 그런데 a는 또한 개념 f의 외연이기도 했었다. 그렇다면 f는 a에 대해 성립하는가? 아니다. (4)에 의하여 a는 f에 해당하지 않는다. 따라서 개념 F와 개념 f는 동일한 외연을 갖

지만, $F(a) \neq f(a)$인 대상 a가 존재한다. 이것은 치역공리와 모순된다.

Ⅳ-3 맺 음 말

논리주의자들의 당초 의도는 수학에서의 어떠한 주관적 요소도 허용하지 않겠다는 것, 즉 수학은 분석적임을 보여주는 것이었다. 그런데 이를 위해서 프레게는 어떠한 논리 외적 가정에도 의존하지 않고서 아무 모순없이 수학을 순수 논리학으로부터 도출하기만 하면 된다고 여겼다. 그러나 프레게의 노력은 실패했다. 그리고 그 직접적인 원인은 제5공리가 모순을 초래하기 때문이었다. 그러나 논리주의의 문제점은 제5공리에만 있는가? 그렇지는 않다. 사실 수학이 분석적이라는 주장은 유일하고도 영원무한한 전지전능의 창조주로서의 신이 존재한다는 주장만큼이나 엄청난 것이어서 제5공리 말고도 논리주의를 선뜻 받아들이기 어렵게 하는 요소는 얼마든지 많다. 더욱이 그 후에 나온 프레게의 수정치역공리[42] 및 러셀이 제시한 환원공리와 무한공리의 논리적 순수성 여부에 대한 논란과 더불어, 러셀의 공리체계를 비롯하여 어떠한 형식적 연역체계도 무모순성과 완전성을 동시에 만족시키지는 못한다는 괴델의 불완전성정리는 논리주의자들의 입지를 보다 더 좁게 만들었다. 이같은 사태의 변화에 따라 수와 수학에 대한 논리주의자들의 여러 가정들을 전면적으로 재검토하고 직관주의, 형식주의 등의 새로운 대안이 등장하지만, 불행히도 필자는 이를 본격적으로 다룰 형편이 못된다. 대신에 프레게의 실패와 관련된 교훈을 지적하는 것으로 이 글을 맺고자 한다.

첫째, 프레게의 수 개념 분석은 비록 수를 순수 논리적 개념들만으로 환원시켜 정의하는 데에 성공했다해도, 그 정의가 수학자나 일상인들이 생각하는 수 개념을 그대로 반영하고 있는지에 대한 의문을 해소해야 한다. 뿐만 아니라 설령 논리주의자들의 수에 대한 정의가 그들의 목적에 부합한다 해도 또 다른 만족스러운 수 정의의 가능성을 배제할 수 없으며, 그럴 경우 경쟁하는 수 정의들 중에서 논리주의자들의 정의를 받아들여야 할 설득력있는 이유를 밝혀야만 한다.

둘째, 논리주의자들의 체계를 통하여 도출된 명제가 과연 수학적 명제이냐의 문제는 수학과 논리학의 경계 구분에 다소 자의적인 측면이 있음을 감안해서 접어둔다 해도, 논리주의자들은 그들의 체계에 나오는 공리들의 분석성에 관한 의구심을 해소시켜야 한다. 다시 말해서 논리주의자들은 자신의 주장이 참임을 보이기 이전에 자신의 주장이 무슨 뜻인지부터 보다 분명히 밝혀야 한다는 것이다.

---

42) 역설에 관한 러셀의 편지(Heijenoort *From Frege to Gödel* pp.124~125)에 대한 프레게의 답신(ibid. pp.126~127)에서 프레게는 역설에 대한 해명을 할 것이라고 약속했다. 이 약속은 산수학의 근본 법칙 제2권의 부록에서 수정치역공리를 제시함으로써 일단 지켜졌으나 프레게 사후 이 수정치역공리마저도 모순을 초래함이 드러났다. 그러나 더미트에 따르면 프레게는 이 수정공리가 공리로서의 자명성이 결여된 미봉책임을 자각하고 생전에 이미 논리주의를 포기했다고 한다. Dummett *Frege: Philosophy of Language* p.657

참 고 문 헌

프레게의 저작

1. *Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought* (1879) in Heijenoort *From Frege to Gödel*(1967)
2. *The Foundations of Arithmetic*(1884) trans, by J.L. Austin(1950)
3. "Function and Concept"(1891) in *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*(1970) trans. by P.T. Geach
4. "On Concept and Object"(1982) in *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*(1970) thans. by P.T. Geach
5. *The Basic Laws of Arithmetic* vol.1(1893), vol.2 Appendix(1902) trans. by Montgomery Furth(1964)

기 타

1. Barker, Stephen(1964) *Philosophy of Mathematics*
2. Currie, Gregory(1982) *Frege:An Introduction to his Philosophy*
3. Dummett, Michael(1973) *Frege:Philosophy of Language*
4. Hamlyn, D. W.(1967) "Analytic and Synthetic Statement" in *Encyclopedia of Philosophy* vol.1
5. Heijenoort, Jean van(1967) *From Frege to Gödel*
6. Parsons, C (1967) "Foundations of Mathematics" in *Encyclopedia of Philosophy* vol.5.
7. Russell, B (1903) *The Principles of Mathematics*
8. Russell, B (1919) *Introduction to Mathematical Philosophy*
9. Sluga, Hans (1980) *Gottlob Frege*