Hilbert 의 프로그램

2001년 9월 18일

D. Hilbert(1862–1943)는 모든 형식체계는

- (consistency) 모순이 없어야 한다. 즉, 그 형식체계 내에의 임의의 명제 p 에 대하여 p 와 $\neg p$ 가 동시에 증명되는 일이 없어야 한다.
- (completeness) 완전하여야 한다. 즉, 그 형식체계에서 나타나는 각 명제 p 에 대하여 p 또는 $\neg p$ 를 증명할 수 있어야 한다.

고 하고, "산술 공리의 무모순성"뿐 아니라 수학의 전부를 형식체계로 구축하고 그 형식체계가 무모순적이고 완전하다는 것을 증명하기를 요구하며 전 세계를 돌아 다니며 이러한 문제의 중요성을 강조하였다.[1]

Hilber 는 일생의 업적으로 1930 년 9 월 8 일에 자신의 고향인 Königsberg 의 명예시민권을 얻는다. 그날 열린 독일 과학-의학 협회의 기조연설에서 Hilbert 는 "자연의 이해와 논리"라는 제목으로 강연하였는데, 그때 남긴 마지막 말이 유명한

Wir müssen wissen.	우리는 알아야 한다.
Wir werden wissen.	우리는 알 것이다.

이다. Hilbert 는 이 말을 그 날 저녁의 라디오 방송에서도 한다 [http://topo.math.u-psud.fr/~lcs/Hilbert/HlbrtKE.htm]. 이 문구는 Hilbert 의 묘비에 새겨져 있다.

이 날을 기념하기 위하여 9월 5일부터 조그만 학회가 열렸다 [Davis, p.122], [Chaitin]. 학회의 첫날에는 수학의 기초에 관하여 한시간 짜리 발표가 세개 있었는데, 첫번째 발표자는 오스트리아의 Wien(Vienna)에서 온 R. Carnap 이었고, 두번째 발표자는 L. Brouwer 의 학생인 A. Heyting, 세번째 발표자는 J. von Neumann 이었다. Von Neumann 은 Hilbert 의 프로그램에 대하여 발표하였다.

학회의 둘쨋날에도 역시 한시간짜리 발표가 세개 있었고, 이어서 20분짜리 발표가 세개 더 있었다. 이 20분짜리 발표자에 Carnap 과 같이 Wien 에서 온 스물네살짜리 K. Gödel 이 있었다. 그는 자신의 박사학위 논문[2]에 대하여 발표하였다.

세쨋날 원탁회의에서 Gödel 은 "산술을 포함하면서 무모순이고 완전한 형식체계는 존재하지 않는다"는 **불완전성 정리**를 발표한다. Von Neumann 은 그 자리에서 Gödel 의 정리의 중요성을 직감하고 Hilbert 의 프로그램이 끝났다고

[1] Hilbert 는 1904 년 Heidelberg 에서 열린 제3회 ICM 에서 "논리학과 산술의 기초에 대하여(Über die Grudlagen der Logik und Arithmetik)" 발표하였고, 1928 년 이탤리의 Bologna 에서 열린 ICM도 이 문제를 강조하였다.

[2] Frege 규칙의 완비성에 관한 것임.

생각한다. Von Neumann 은 논리학과 수학의 기초에 관하여 흥미를 가지고 있었고, 그날 이후로 Gödel 과 친하게 지내었고 Gödel 의 업적을 널리 홍보하였으며 Gödel 을 아리스토텔레스 이후로 가장 훌륭한 논리학자라고 말하였지만, 진정 자기 자신은 더이상 논리학을 연구하지 않았다.

1 Gödel 의 불완전성 정리

Gödel 은 거짓말장이 파라독스

이 문장은 그르다

를 변형하여

이 문장은 증명할 수 없다

라는 명제를 생각하였다. 이 명제를 p 로 두면

$$p \quad = \quad p \text{ 는 증명할 수 없다}$$

이다. Gödel 은 이 명제를 산술의 명제로 바꿀 수 있었다.[3]

그러면 산술을 포함하는 형식 체계 S 에 대하여

(i) p 는 참인 명제이다. 이것을 증명하기 위하여 형식체계 S 가 무모순이라고 가정하여도 된다. 만약 p 가 거짓이라면 "p 는 증명할 수 없다"가 거짓이고, 따라서 "p 는 증명할 수 있다"가 되어 거짓명제를 증명하게 되는 모순이 생긴다. 그러므로 p 는 참이라야 한다.

(ii) $\neg p$ 는 거짓이므로, S 가 무모순이면 $\neg p$ 는 증명할 수 없다.

(iii) S 가 무무순이라면, p 는 증명할 수 없다. 왜냐하면, 만약 증명할 수 있다면, p 가 참이고 동시에 "p 를 증명할 수 없다"가 참이라는 모순이 생기기 때문이다.

(iv) 더군다나, 형식 체계 S 가 무모순이라면 "S 는 무모순이다"를 증명할 수 없다.

따라서 산술을 포함하는 무모순인 형식체계는 참임에도 불구하고 증명할 수 없는 명제를 가지므로 완전한 형식체계가 아니다.

Gödel 의 발견으로 Hilbert 의 꿈은 산산 조각이 났다. 하지만 만약 Hilbert 의 꿈이 이루어졌다면 어떠한 일이 벌어질까? Hilbert 의 꿈이 실현된다는 것은 바로 수학이라는 학문의 종말을 뜻할 수도 있다. Gödel 의 정리는 수학이 영원하다는 것을 말하고, 더 나아가 사람과 기계와 본질적으로 다르다는 것을 의미할 수도 있다. ([Changeux, Connes], [Connes, Lichnerowicz, Schützenberger], [Penrose], [Davis], [Dennet]) Gödel 의 정리는 어떠한 형식 체계이던지 그것이

[3] 각 기호에 자연수를 대응시키면, 기호로 쓰여진 명제 p 는 자연수의 수열이 된다. 이때 유한 자연수열 $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ 에 대하여 자연수 $2^{n_1} 3^{n_2} 5^{n_3} \cdots$ 를 대응시킬 수 있다. 이 자연수를 "명제 p 의 Gödel 수"라 한다. Gödel 은 회기(recursive)함수 이론을 정립하여 불완정성 정리를 발표하였다. Gödel 의 이론은 후에 "컴퓨터 언어"의 모체가 된다.

증명할 수 있는 것에는 한계가 있으며, 증명할 수 없어도 참인 명제가 있다면 우리의 공리계를 더 넓히면 된다는 것을 의미하기도 한다.

후에 A. Turing의 업적과 20세기 디지털 혁명을 살펴보면 Gödel의 정리는 Hilbert의 꿈을 진정한 의미에서 실현되게 한 것으로 볼 수 있다.

2 Goodstein 정리

토끼와 거북이가 다음과 같이 경기를 한다고 한다 [Connes et al., 2001]. 먼저 자연수 n 을 하나 생각한다. 예를 들어 $n = 9$ 라 하자. 이 수를 2진법으로 표현하면

$$9 = 2^{2+1} + 1$$

이다.[4] 그러면 토끼는 밑수 2를 하나 증가시킨다.

$$3^{3+1} + 1.$$

그 다음에 거북이는 1을 뺀다:

$$3^{3+1}.$$

다시 토끼는 밑수를 하나 증가 시킨다:

$$4^{4+1}.$$

그러면 거북이는 1 을 뺀다:

$$3 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3.$$

이와 같이 토끼는 밑수를 하나 증가시키고 거북이는 1을 빼는 것을 계속하면 다음과 같이 나온다.

$$\begin{aligned}
\text{토끼:}\ & 3 \cdot 5^5 + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 3. \\
\text{거북이:}\ & 3 \cdot 5^5 + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2. \\
\text{토끼:}\ & 3 \cdot 6^6 + 3 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 2. \\
\text{거북이:}\ & 3 \cdot 6^6 + 3 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 1. \\
\text{토끼:}\ & 3 \cdot 7^7 + 3 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 1. \\
\text{거북이:}\ & 3 \cdot 7^7 + 3 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7. \\
\text{토끼:}\ & 3 \cdot 8^8 + 3 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8. \\
\text{거북이:}\ & 3 \cdot 8^8 + 3 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 7. \\
& \vdots
\end{aligned}$$

[4] 2진법으로 표현할 때 3 이상의 숫자를 사용하지 않도록 한다. 예를 들어 513 을 이진법으로 표현하면 $2^{2^{2+1}+1} + 1$ 이다.

이 경기의 목적이 토끼는 한없이 큰 수를 얻는 것이고, 거북이는 0을 얻는 것이라면 과연 누가 이길까?

R. Goodstein 은 서수(ordinal number) 이론을 사용하여 임의의 n 에 대하여 거북이가 이긴다는 것을 증명하였다.

그가 증명한 방법은 다음과 같다. 위에서 토끼가 만든 수를 생각하자. 이때 밑수를 모두 서수 ω 로 바꾸면 다음과 같은 감소하는 서수의 열을 얻는다.

$$\begin{array}{l} \omega^{\omega+1}+1 \\ \omega^{\omega+1} \\ 3\cdot\omega^{\omega}+3\cdot\omega^{3}+3\cdot\omega^{2}+3\cdot\omega+3 \\ 3\cdot\omega^{\omega}+3\cdot\omega^{3}+3\cdot\omega^{2}+3\cdot\omega+2 \\ 3\cdot\omega^{\omega}+3\cdot\omega^{3}+3\cdot\omega^{2}+3\cdot\omega+1 \\ 3\cdot\omega^{\omega}+3\cdot\omega^{3}+3\cdot\omega^{2}+3\cdot\omega \end{array}$$

한편 감소하는 서수의 열은 반드시 유한 수열이므로 거북이가 이긴다.

L. Kirby 와 J. Paris 는 Goodstein 정리를 PA(페아노의 산술 공리) 안에서 증명할 수 없음을 보였다.

참고문헌

G. Chaitin, *The Unknowable*, http://www.umcs.maine.edu/~chaitin/unknowable/.

M. Davis, *The universal computer*, W. W. Norton & Company, 2000.

R. Goodstein. *On the restricted ordinal theorem*, J. Symbolic Logic **9** (1944), 33–41.

L. Kirby, J. Paris, *Accessible independence results for Peano arithmetic*, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), 285–93.