칼만 필터를 이용한 레이다 추적계의 비교연구

임청부* · 위상규(서울대학교)

1. 序 論

레이다로 어떤 目標物(Target)을 追跡(Tracking) 할때 보다 정확하게 目標物의 위치,속도,가속도등을 推定해내야 한다. 이때 가장 정확하게 推定해내려면 모든 상태변수를 測定裝備로부터 測定해내면 된다. 그러나 모든 상태변수를 測定할때 각 상태변수에 添加되는 雜音을 고려해보면 모든 상태변수를 測定하는것이 理想的 이라고 할수없는 경우가 있다. 즉 어떤 변수는 雜音에 敏感하여 오히려 전체 追跡系에 나쁜 영향을 줄수가 있기 때문이다. 또한 測定裝備의 가격이라든지크기,무게 등여러要因때문에모든 상태변수를 測定할 필요가 없게된다.

따라서 많은 상태변수중 몇개만을 測定하여 雜音의 雜音의 영향을 적게 받으면서 전체 상태변수들의 誤差 共分散行列의 對角項들(분산)을 最小化하는것이 필요하게된다. 이러한 작업을 하는 대표적인 것으로는 칼만필터가 있다. 칼만필터의 종류는 플랜트의 상태방정식의형태(連續 또는 離散)와 測定式의 형태(連續 또는 離散)에 따라 여러가지의 조합이 있을수 있다.

本 論文에서 測定式은 離散式을 사용했으며 플랜트의 상태 방정식은 連續(Continuous)인경우와 離散(Discrete)인 경우를 다루었다. 레이다는 지상 레이다로 잡았으며 플랜트의 모델은 短距離 모델로 高度가 5000 m 에서 速度가 300 m/sec 로 等速 水平飛行하는 항공기를,長距離 모델로 高度가 200 Km 인圓 軌道를 7.79 Km/sec 의 速度로 도는 인공위성으로 했으며 각각 모델의 거리와 각도만을 측정하여 전체 상태변수인 거리,속도,각도, 각속도를 120 초 동안 推定하도록 하였다

초기의칼만필터형식은 離散방식으로부터 출발하였으며 連續방식은 離散방식 으로부터 유도되었다.현재는 진보된 컴퓨터기술로인해 離散방식이 보다 보편화되어있다.

本 論文의주된방향은 플랜트의상태방정식이 非線形이면서 連續일경우를 線形이면서 離散形인경우로 바꿀때 생기는 여러가지 문제점 을 短距離모델과 長距離모델에 대해서 比較 硏究하였다.

2. 모 델

2.1 短距離 모델

飛行高度 5000m에서 속도가 300m/sec로 等速水平飛行하는 目標物의 거리,각도만을 測定하여

거리,속도,각도,각속도를 120초 동안 推定하는 문제

A) 測定間隔이 T = 1 초일때

B) 測定間隔이 T = 2 초일때

初期値

$$v_o = v = 300 \ (m/sec) \qquad (2\text{-}1)$$

$$x_o = 5000 \ (m)$$

$$h_o = h = 5000 \ (m)$$

$$\theta = ATAN2(h_o, x_o) = 45_o$$

정확한 식

$$x = x_o + vt$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{r} = v\cos\theta \\ \theta = ATAN2(y, x) \\ \dot{\theta} = -\dfrac{v}{r}\sin\theta \end{cases} \qquad (2\text{-}2)$$

測定器의 標準偏差

$$\sigma = 30 \ (m)$$

$$\sigma = 0.1^2 = 1.7453E-3 \ (rad) \qquad (2\text{-}3)$$

2.2 長距離 모델

飛行高度 200 Km에서 속도가 7.79Km/sec로 圓軌道를 等速度 운동하는 인공위성의 거리와 각도만을 測定하여

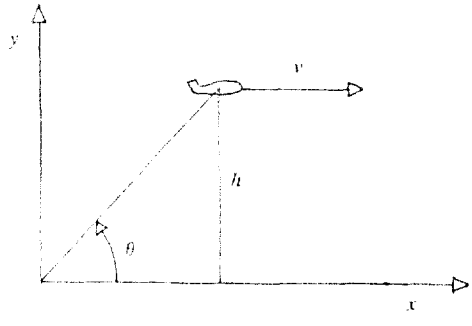

Figure 2 - 1 Short Range Model

目標物의 거리,속도,각도,각속도를 120초동안 推定하는 문제

A) 測定間隔이 T = 1 초일때

B) 測定間隔이 T = 1 초일때

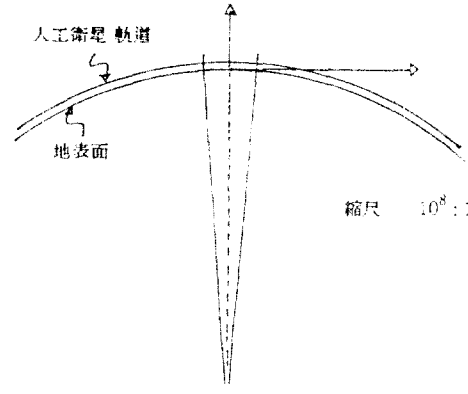

Figure 2 - 2 Assumption of Orbit

인공위성周期 T = 88 (min) (2-4)

지구반지름 R = 6400 (Km)

인공위성의 高度 h = 200 (km)

120 초 동안의 飛行距離 s = vt = 7.79 * 120

= 934.8 (km)

120 초 동안의 飛行角度 88 :360 = 2 :x

x = 720/88 = 8.18°

初期位置

$$x_o = -934.8/2 = -467.4 \ (Km) \qquad (2\text{-}5)$$

$$y_o = 200 \ (Km)$$

$$\theta_o = ATAN2(y_o, x_o) = 156.83^o$$

$$r_o = 508.39 \ (Km)$$

정확한 계산식은 短距離모델과 같다.

測定器의 標準偏差

$$\sigma_r = 2000 \ (m) \qquad (2\text{-}6)$$

$$\sigma_\theta = 2^o = 3.4907E-2 \ (rad)$$

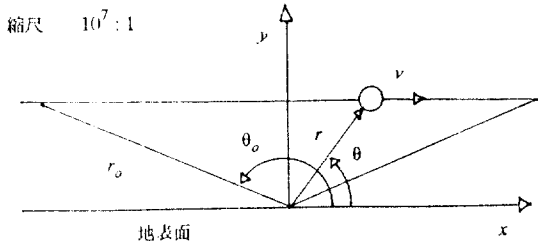

Figure 2 - 3 Long Range Model

3. 本 論文에서 사용한 칼만필터의 모델

3-1 連續-離散型 칼만 필터 (C-DKF)

문제를 간단히 하기위해서 r,θ 는 測定時間 동안에 크게 변하지 않는다고 假定한다.

$$\ddot{r} \approx 0 \qquad \ddot{\theta} \approx 0 \tag{3-1}$$

이 때 測定時間 동안에 실제 $\dot{r},\dot{\theta}$ 의 작은 변화를 고려하기위해 雜音을 다음 과 같이 둔다.

$$\frac{d}{dt}\dot{r} = w_1(t)\ ,\ w_1 \approx (0,Q) \qquad \frac{d}{dt}\dot{\theta} = w_2(t)\ ,\ w_2 \approx (0,R) \tag{3-2}$$

w1(t),w2(t)를 생각하는 이유는 모델의 방정식에서 非線形 항들을 무시해서 생기는 모델화 되지않은 식의 영향을 補償해 주기 위해서이다.

w(t) : Maneuver noise (Process noise : 狀態 雜音)

따라서 앞식 은 다음과 같이 간단하게 될수 있다.

$$\dot{r} = \dot{r} \qquad \ddot{r} = w_1(t) \qquad \dot{\theta} = \dot{\theta} \qquad \ddot{\theta} = w_2(t) \tag{3-3}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ w_1(t) \\ 0 \\ w_2(t) \end{bmatrix} \tag{3-4}$$

$$\dot{x} = Ax + w(t)$$

레이다로 測定하는 것은 거리와 각도뿐이므로

$$z(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix} \tag{3-5}$$

$$z(k) = Hx(k) + v(k)$$

狀態 雜音 誤差 共分散 (Q)을 구하기 위해 雜音 가속도가 最大,最小 가속도 (+a ,-a) 사이에서 서로 獨立的이고 確率密度函數가 均一하게 分布되어 있다고 假定하면

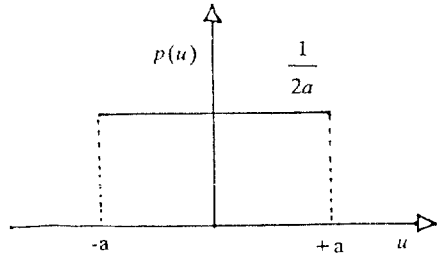

Figure 3 - 1 Probability Density Function

平均 $m = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a} du = 0$ (3-6)

分散 $V(x) = E(x^2) - E(x)^2 = E(x)^2$ (3-7)

$$\sigma_w^2 = \int_{-a}^{a} u^2 p(u) du - m^2$$

$$Q = E[w(t)w^T(t)] \tag{3-8}$$

$$R_d = E[v(k)v^T(k)] \tag{3-9}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2/3r^2 \end{bmatrix}$$

$$R_d = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 \end{bmatrix}$$

플랜트의 상태 방정식

$$\dot{x} = Ax + w(t) \tag{3-10}$$

測定式

$$z(k) = Hx(k) + v(k) \tag{3-11}$$

時間 展開式 (Time Update)

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} \tag{3-12}$$

Lyapunov Equation

$$\dot{P} = AP + PA^T + GQG^T \tag{3-13}$$

測定 展開式 (Measurement Update)

$$\begin{aligned} K(k) &= M(k)H^T(k)[H(k)M(k)H^T(k) + R_d]^{-1} \\ P(k) &= [I - K(k)H(k)]M(k) \\ \hat{x}(k) &= \bar{x}(k) + K(k)[z(k) - H(k)\bar{x}(k)] \end{aligned} \tag{3-14}$$

初期値

$$\begin{aligned} \hat{x}(0) &= \bar{x}_o \\ P_o &= P(0) \end{aligned} \tag{3-15}$$

3-2 離散-離散型 칼만 필터 (D-DKF)

連續-離散型 칼만필터 모델을 離散-離散型 칼만 필터 모델로 바꾸게되면

$$\begin{aligned} \phi &= e^{AT} \\ &= I + AT + \frac{A^2T^2}{2!} + \cdots + \frac{A^kT^k}{k!} + \cdots \end{aligned} \tag{3-16}$$

$$\phi = I + AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_d = \int_0^T e^{A\tau} GQG^T e^{A^T\tau} d\tau \tag{3-17}$$

$$Q_d = \begin{bmatrix} pT^3/3 & pT^2/2 & 0 & 0 \\ pT^2/2 & pT & 0 & 0 \\ 0 & 0 & qT^3/3 & qT^2/2 \\ 0 & 0 & qT^2/2 & qT \end{bmatrix}$$

$$R_d = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 \end{bmatrix} \qquad 단\ p = \frac{a^2}{3},\ q = \frac{a^2}{3r^2} \tag{3-18}$$

플랜트의 상태방정식

$$x(k+1) = \phi(k)x(k) + w(k) \tag{3-19}$$

測定式

$$z(k) = H(k)x(k) + v(k) \tag{3-20}$$

時間展開式 (Time Update)

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= \phi(k)x(k) \\ M(k+1) &= \phi(k)P(k)\phi^T(k) + Q_d \end{aligned} \tag{3-21}$$

測定展開式 (Measurement Update)

$$\begin{aligned} K(k) &= M(k)H^T(k)[H(k)M(k)H^T(k) + R_d]^{-1} \\ P(k) &= [M^{-1} + H^T(k)R_d^{-1}H(k)]^{-1} \\ &= [I - K(k)H(k)]M(k) \\ \hat{x}(k) &= \bar{x}(k) + K(k)[z(k) - H(k)\bar{x}(k)] \end{aligned} \tag{3-22}$$

初期値

$$\begin{aligned} \hat{x}(0) &= \bar{x}_o \\ P_o &= P(0) \end{aligned} \tag{3-23}$$

3-3 擴張型 칼만필터 (EKF)

플랜트의 非線形 狀態 방정식

$$\begin{cases} \dot{r} = \dot{r} \\ \ddot{r} = -v\,\dot{\theta}\sin\theta + w_1(t) \\ \dot{\theta} = \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} = -\dfrac{v}{r}\dot{\theta}\cos\theta + \dfrac{v}{r^2}\dot{r}\sin\theta + w_2(t) \end{cases} \tag{3-24}$$

$$\dot{x} = f(x,u,t) + G(t)w$$

이때w1(t),w2(t)의 雜音을넣어주는이유는w1(t),w2(t)가 없게되면 칼만필터의 利得이 시간이 지남에 따라 0 으로 收斂하게되어 점점 測定의 의미가 없어지는 것을 방지하기 위해서이다.

Jacobian

$$A(x,t) = \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a1 & a2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a3 & a4 & a5 & a6 \end{bmatrix} \tag{3-25}$$

$$a1 = -v\dot{\theta}\cos\theta$$

$$a2 = -v\sin\theta$$

$$a3 = -\frac{2v\dot{r}}{r^3}\sin\theta + \frac{v\dot{\theta}}{r^2}\cos\theta$$

$$a4 = \frac{v}{r^2}\sin\theta$$

$$a5 = \frac{v\dot{r}}{r^2}\cos\theta + \frac{v\dot{\theta}}{r}\cos\theta$$

$$a6 = -\frac{v}{r}\cos\theta$$

測定式은 線形일때와 같다고 보면

$$z(k) = h[x(k),k] + v(k) \qquad (3\text{-}26)$$

時間展開式 (Time Update)

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x},u,t) \qquad (3\text{-}27)$$

$$\dot{P} = A(\hat{x},t)P + PA(\hat{x},t)^T + GQG^T$$

測定展開式 (Measurement Update)

$$K(k) = M(k)H^T(\bar{x}_k)[H(\bar{x}_k)M(k)H^T(\bar{x}_k) + R_d]^{-1}$$

$$P(k) = [I - K(k)H(\bar{x}_k)]M(k) \qquad (3\text{-}28)$$

$$\hat{x}(k) = \bar{x}(k) + K(k)[z(k) - h(\bar{x}_k,k)]$$

初期値

$$\hat{x}(0) = \bar{x}(0) \qquad (3\text{-}29)$$

$$P_o = P(0)$$

Discrete - Discrete Kalman Filter (離散-離散型 칼만필터)

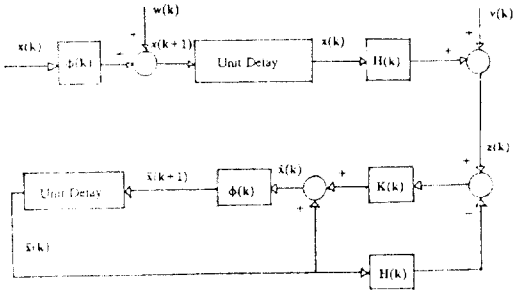

Figure 3-2 D-DKF Algorithm (A)

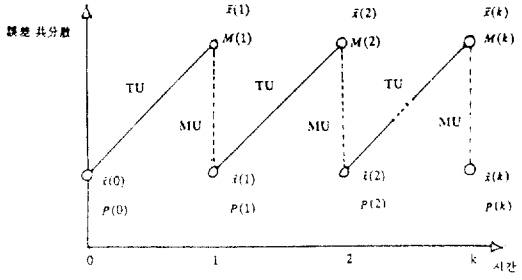

Figure 3-3 D-DKF Algorithm (B)

$$M = E[(x-\bar{x})(x-\bar{x})^T]$$

$$P = E[(x-\hat{x})(x-\hat{x})^T] \qquad (2.3\text{-}22)$$

Contunuous - Contunuous Kalman Filter (連續-連續型 칼만필터)

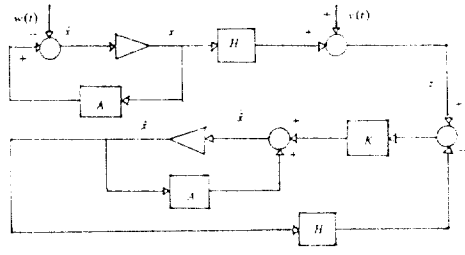

Figure 3-4 C-CKF Algorithm

시뮬레이션 할때 사용된 데이타들

短距離 모델		長距離 모델	
時間 間隔	最大 加速度	時間 間隔	最大 加速度
T = 1 (sec)	$a = 1\ (m/sec^2)$	T = 4 (sec)	$a = 1000\ (m/sec^2)$
	$a = 5\ (m/sec^2)$		$a = 10\ (m/sec^2)$
T = 2 (sec)	$a = 1\ (m/sec^2)$	T = 8 (sec)	$a = 1000\ (m/sec^2)$
	$a = 5\ (m/sec^2)$		$a = 10\ (m/sec^2)$

目標物의 初期位置

短距離 모델	長距離 모델
$r_o = 5000$ (m)	$r_o = 400$ (Km)
$\theta_o = 60^o$	$\theta_o = 135^o$

各裝備의 標準偏差

短距離 모델	長距離 모델
$\sigma_r = 30$ (m)	$\sigma_r = 2000$ (m)
$\sigma_\theta = 0.1^o$	$\sigma_\theta = 2^o$

TABLE 1

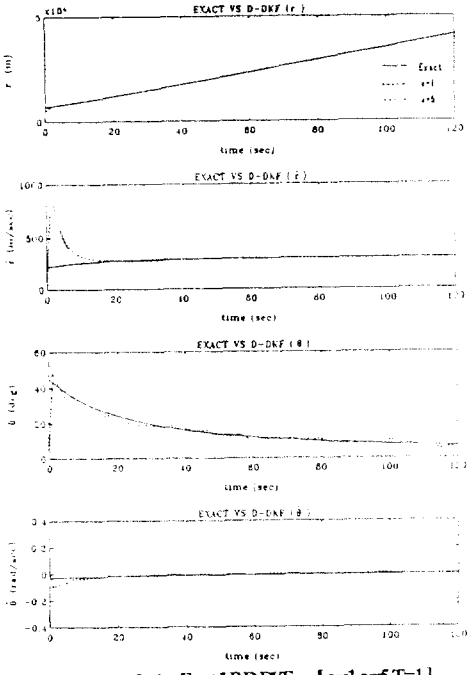

Figure 5-1 Exact VS D-DKF [a=1,a=5,T=1]

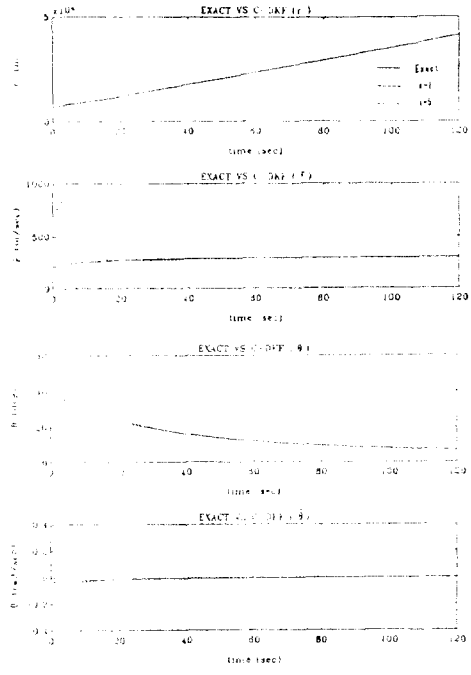

Figure 5-2 Exact VS C-DKF [a=1,a=5,T=1]

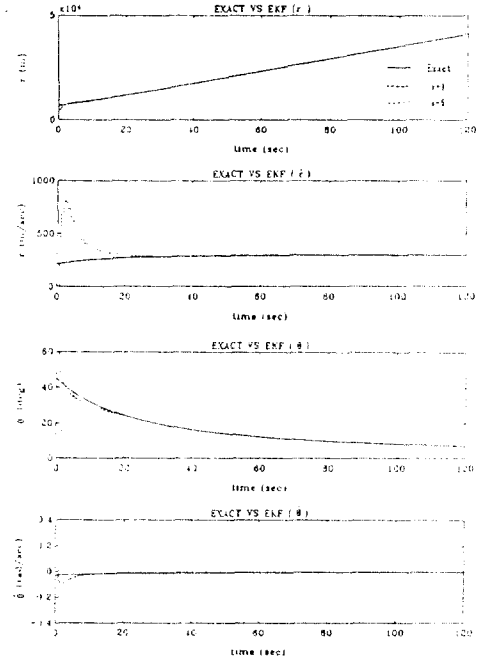

Figure 5-3 Exact VS EKF [a=1,a=5,T=1]

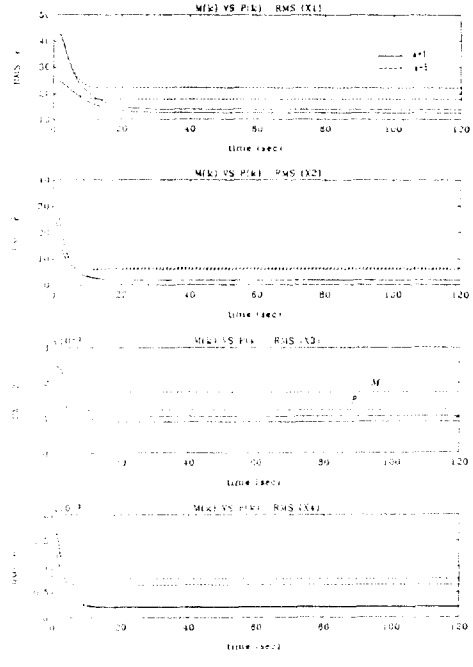

Figure 5-4 RMS(D-DKF) [a=1,a=5,T=1]

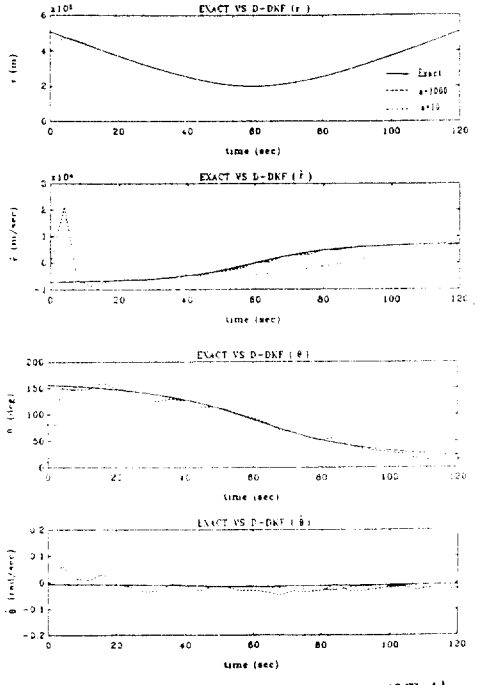

Figure 5-5 Exact VS D-DKF [a=1000,a=10,T=4]

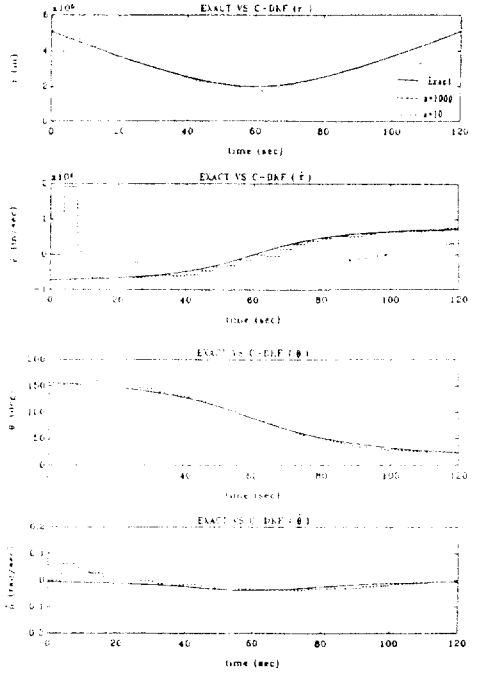

Figure 5-6 Exact VS C-DKF [a=1000,a=10,T=4]

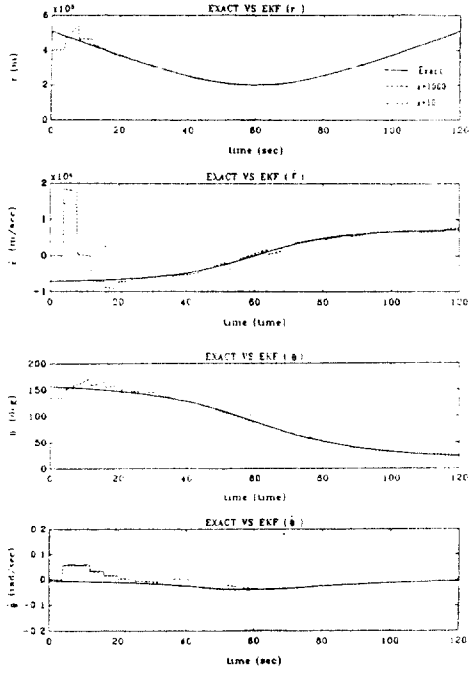

Figure 5-7 Exact VS EKF [a=1000,a=10,T=4]

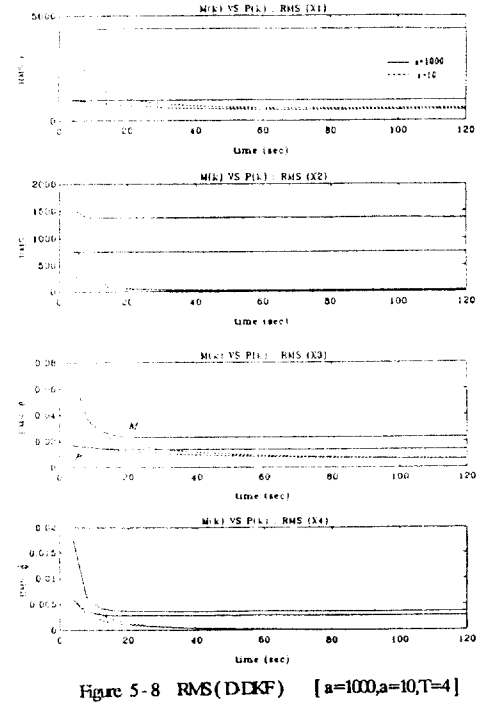

Figure 5-8 RMS(D-DKF) [a=1000,a=10,T=4]

----- Steady Kalman Gain (D-DKF) ----- ----- Steady Kalman Gain (C-DKF) -----

time(sec)	k11	k21	k12	k22	k11	k21	k12	k22
1	6.6667e-001	5.3333e-001	6.6667e-001	3.3333e-001	.6667E+00	.3333E+00	.6667E+00	.3333E+00
100	3.9021e-002	5.8240e-004	3.9021e-002	5.8240e-004	.3902E-01	.5824E-03	.3902E-01	.5824E-03
200	1.9153e-002	1.4774e-004	1.9153e-002	1.4774e-004	.1915E-01	.1477E-03	.1915E-01	.1477E-03
300	1.3121e-002	6.6465e-005	1.3121e-002	6.6465e-005	.1312E-01	.6646E-04	.1312E-01	.6646E-04
400	9.9374e-003	3.7220e-005	9.9374e-003	3.7220e-005	.9934E-02	.3722E-04	.9934E-02	.3722E-04
500	7.9602e-003	2.3857e-005	7.9602e-003	2.3857e-005	.7960E-02	.2386E-04	.7960E-02	.2386E-04
600	6.6398e-003	1.6546e-005	6.6398e-003	1.6546e-005	.6639E-02	.1654E-04	.6639E-02	.1654E-04
700	5.6929e-003	1.2159e-005	5.6929e-003	1.2159e-005	.5693E-02	.1216E-04	.5693E-02	.1216E-04
800	4.9844e-003	9.3399e-006	4.9844e-003	9.3399e-006	.4984E-02	.9340E-05	.4984E-02	.9340E-05
900	4.4322e-003	7.3829e-006	4.4322e-003	7.3829e-006	.4432E-02	.7383E-05	.4432E-02	.7383E-05
1000	3.9908e-003	5.9829e-006	3.9908e-003	5.9829e-006	.3990E-02	.5983E-05	.3990E-02	.5983E-05
1100	3.6281e-003	4.9452e-006	3.6281e-003	4.9452e-006	.3628E-02	.4946E-05	.3628E-02	.4945E-05
1200	3.3264e-003	4.1563e-006	3.3264e-003	4.1563e-006	.3326E-02	.4157E-05	.3326E-02	.4156E-05

NOTE : when a = 0

k11 = k22

k21 = k12

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

Table 2 Steady Kalman Gain

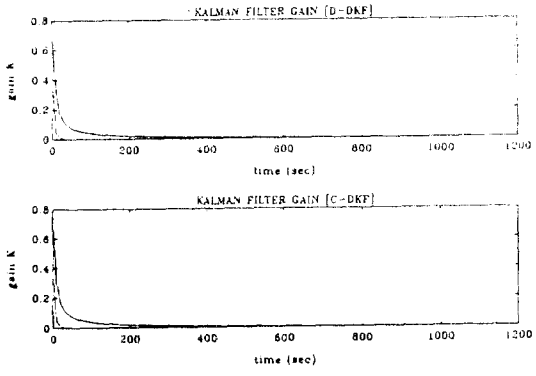

Figure 5-9 Kalman Gain (C-DKF) [a=0,T=1]

4. 시뮬레이션 방법

* 시 뮬 레 이 션 순 서 *

STEP 1 a(最大加速度) 값을 바꾸어가면서 C-DKF로 먼저 시뮬레이션한다

STEP 2 C-DKF에서 각 상태변수의 RMS값의 변화를 살펴본다.
변화가 없음에도 불구하고 RMS값이 주어진 測定雜音의 標準偏差값보다 커지게되면 測定의 효과가 없어지므로 보다 작은 a값을 선택한뒤 STEP 1 을 되풀이한다

STEP 3 a값이 작아지면 RMS값도 작아지게된다
RMS값이 너무작으면 測定의 효과가 減少되어 정확한 상태변수값들과 차이가 많이 나게된다. 따라서 정확한 상태변수와 誤差가 많이 나지않게하면서 RMS값이 주어진 測定雜音의 標準偏差값보다 작아지게하는 a값을 찾아낸다

STEP 4 C-DKF를 D-DKF로 바꾸어 시뮬레이션한다

STEP 5 EKF 시뮬레이션을 한다
EKF 시뮬레이션은 w1(距離測定에 대한 雜音), w2(角度測定에 대한 雜音)의 分散값의 비를 변화시켜본뒤 한다

확인 a ->0 일때 K ->0 인가를 각각의 모델에 대하여 알아본다

5. 結 論

1-1. a(假定된 最大加速度)가 작아지면 狀態雜音(Q)가 작아져서 RMS값은 떨어진다. 그러나 狀態雜音을 고려한 推定式에서 狀態雜音이 작게되면시간이 흐름에따라 칼만利得(K)이 작아져서 測定의 效果가 감소하기때문에 정확한 계산값과 차이가 나게된다.

1-2. a가 커지면 狀態雜音이 커져서 RMS값은 증가한다. 하지만 測定效果는 더 커지므로 정확한 계산값과 차이가 덜 나게된다.

2. a=0이되면 狀態雜音이 없다는 뜻이며 이때는 狀態雜音을 고려한 測定效果를 기대할수 없으므로 상태변수중 어느값이 발산하는 경우가 생기게된다.

3. 최종적으로 短距離모델(T=1)에서 EKF,C-DKF,D-DKF는 별차이없이 잘 나타내고 있다. 長距離 모델(T=4)에서 EKF,C-DKF,D-DKF는 短距離 모델(T=1)보다 다소 誤差가 많이나나 이것은 長距離 測定이므로 측정기의 특성에 기인한다. 보다 정확한 推定이 필요할때는 標準偏差가 작은 측정기를 사용해야한다.

4. EKF 모델은 C-DKF,D-DKF 모델보다 a값의 변화에대해 덜 敏感함을 알수있다. 하지만 간단한 모델에대한 EKF는 계산시간이 길고 실제 필터를 設計할때 複雜 해지는 短點이 있다.

參 考 文 獻

1. Arthur E. Bryson , Yu-Chi Ho. "Applied Optimal Control", John Wiley & Sons, 1975

2. Frank L. Lewis , "Optimal Estimation" , John Wiley & Sons, 1986

3. S.M. Bozic , "Digital and Kalman Filtering" , Edward Arnold , 1979

4. Peter S Maybeck , "Stochastic Models,Estimation and Control", , Volume 1 , Academic Press , 1979

5. Meditch , "Stochastic Optimal Linear Estimation and Control", McGRAW - HILL Inc , 1969

6. Andrew P. Sage , Chelsea C. White Ⅲ , "Optimal Systems Control" , PRENTICE - HALL Inc , 1977

7. Robert Grover Browen , "Intoduction to Random Signal Analysis and Kalman Filtering" , John Wiley & Sons, 1983

8. Athanasios Papoulis , "Probability, Rnadom Variables and Stochastic Process" , PRENTICE - HALL Inc , 1977

9. H.W. Sorenson , "Kalman Filtering Techniques" , Space Systems Group AC Electronics Division , General Motors Corporation El Segundo , California , 1965

10. Paul Katz , "Digital Contol using Microprocessors" , PRENTICE - HALL Inc , 1981

11. James A. Cadzow , Hinrich R. Martens , "Disctre - Time and Computer Control Systems" , PRENTICE - HALL Inc , 1970

12. 朴 瑋培 , "A Study on the Application of the Multivarible Estimation Theory to a Strapdown Inertial Navigation System" , 서울 대학교 공과 대학원 박사 학위 논문 , 1989

13. 柳 東永 , "A study on the Longitudinal Flight Controller Design by using Multirate Discrete Optimal Control" , 서울 대학교 공과 대학원 석사 학위 논문 , 1988

14. 加藤寬一郎 , "最適制御 入門" , 東京 大學 出版會 , 1987