1996 Proceedings of the Spring Conference, Korean Statistical Society

퍼지 경영과학

Fuzzy Management Science

이건창
(성균관대학교 경영학부 교수)

1. 서론

1.1 퍼지 경영과학에 대하여

현대의 사회 또는 경제적 현상은 대규모이고, 복잡하다는 특성을 가지고 있다. 따라서 시장수요 및 요구조건도 다양화 되며 많은 변화를 받고 있다. 경영과학은 경영의사결정과 관련된 모든 분야를 다루는바, 주요분야를 살펴보면 마케팅, 생산, 재무, 인사/조직, 의사결정분석, 전문가시스템, 통계추론 등이 있다. 이러한 경영과학 분야에서 기존에 사용되던 방법들은 급속히 경영환경 변화에 능동적으로 대처하기에는 이론적인 한계가 있다. 그러나, 퍼지이론은 사람들이 가지고 있는 일반적인 지능정보 처리에 관련된 기능과 비슷하게 작동되기 때문에, 경영환경이 급속히 변하고 그에 따라 관련된 경영의사결정 정보내의 불확실성과 모호성이 증가되는 경우에도 매우 효과적으로 적용될 수가 있다.

따라서 퍼지 경영과학은 변화하는 환경에 보다 유연하게 대처할 수 있는 유용한 이론적인 틀을 제공한다는 점에서 기존의 경영과학 기법과 구별된다. 예를 들면, 기존 경영과학 기법들은 주어진 문제에 대해 특정 해 (solution) 하나만을 구하려는 반면에, 퍼지 경영과학은 다중해 (multiple solutions)를 제시할 수 있다. 또한 전문가나 의사결정자의 다양한 관점을 반영할 수 있는 이론적인 틀을 제공한다.

본고에서는 이러한 퍼지 경영과학과 관련된 내용을 중심으로 퍼지이론을 소개하고, 그 특성 및 유용성을 소개하고자 한다.

1.2 퍼지 경영과학의 개요

퍼지 경영과학의 대강은 여러가지 기준으로 분류할 수가 있겠으나, 본고에서는 (1) 자료 및 경험획득, (2) 모델링, (3) 분석 및 평가, (4) 최적화 및 의사결정, (5) 기타응용 등으로 분류한다.

우선 자료 및 경험획득에 관한 것으로서는 퍼지 데이타베이스 (fuzzy database)와 퍼지 지식베이스 (fuzzy knowledge base)로 구분할 수 있다. 퍼지 데이타베이스는 기존의 데이타베이스를 퍼지화 한것으로서 대개 퍼지 관계형 데이타베이스를 의미한다. 퍼지집합으로 표현된 모든 자료를 효과적으로 저장, 추출, 조회 및 갱신등이 가능하다. 퍼지 지식베이스는 특정분야의 전문가 지식을 보다 융통적인 형태인 퍼지지식으로 구현한 것이다. 따라서 이러한 퍼지 지식베이스를 이용하는 전문가시스템 (expert system)의 경우 퍼지 근사추론 (fuzzy approximate reasoning)방법을 적용하여야 한다. 이러한 퍼지 근사추론에는 modus ponens, modus tollens, syllogism (삼단논법), contraposition (대치법) 등외에 여러가지 형태의 추론방식이 존재한다.

모델링에는 퍼지 구조모형 (fuzzy structural model), 퍼지 회귀모형 (fuzzy regression model), 퍼지 GMDH (group method of data handling)등이 있다. 구조모형이란 경영조직에서 그룹간의 관계를 보다 원할하게 나타내기 위하여 그래프를 이용하는 것으로서, 복잡한 시스템의 구조와 개요를 나타내는데에 효과적으로 사용된다. 이러한 구조모형 방식을 퍼지화하여 일반화 시킨것이 퍼지 구조화모형이다. 퍼지 회귀분석은 회귀분석의 계수를 퍼지화하여, 퍼지성 (fuzziness)이 포함된 자료를 보다 효과적으로 처리할 수 있다. GMDH는 주어진 시스템에 대한 사전지식이 없이도 입력자료와 출력자료간의 관계를 모형화하여 주어진 시스템의 특성을 파악하여 예측을 도모하는 방법이다. 따라서 퍼지 GMDH는 이러한 계수를 퍼지화하여 보다 효과성이 제고된 방법이다.

분석 및 평가에는 대표적으로 퍼지 AHP (Analytic Hierarchy Process)가 있다. 이는 AHP는 본래 Saaty교수가 제안한 대안평가 방법이다. AHP에서 주로 사용되는 것이 소수로 이뤄진 실수값 가중치인데, 퍼지 AHP에서는 이를 퍼지화하여 버다 일반적인 형태로 확장한 것이다.

최적화 및 의사결정에는 퍼지 수리계획법 (mathematical programming), 퍼지 다중목적 프로그래밍 (multiobjective programming), 퍼지 다중속성 의사결정 (MADM: Multi-Attribute Decision Making), 퍼지 총계적 의사결정등이 있다.

2. 퍼지이론의 개념 및 개요

2.1 개요

퍼지이론은 1965년 L.A. Zadeh교수가 제안한 퍼지집합 (fuzzy sets)으로 출발한다. 그후 많은 학자들의 연구에 의하여 퍼지로직 (fuzzy logic)과 퍼지측정 (fuzzy measure)론이 확립되었다. 사람들이 가지고 있는 일반적인 지능정보 처리는 크게 두단계로 나눌 수가 있다. 첫째는 주어진 대상으로부터의 자료 또는 정보의 인식단계이다. 이 단계에서 사람들은 주어진 자료 또는 정보로부터 어떤 '느낌' (impression)을 받는다. 둘째는 이러한 느낌을 자연어 (natural language)로 표현한다는 것이다. 사람들은 컴퓨터와는 달리 엄밀한 계산방식이나 표현방식을 택하지 않는다. 오히려 '~것 같다', '~지도 모른다', '매우', '꽤', '그저그런', '대략' 등등 여러가지 표현방식을 이용하는것이 더 자연스러우며 이러한 방식에 걸맞는 계산방식이 오히려 의사결정과정에 더 효과적으로 사용될 수가 있는 것이다.

이러한 일반적인 지능정보 처리방식에 적합한 퍼지이론은 크게 두가지에 촛점을 맞추고 있다. 첫째는, 인간의 자연언어를 컴퓨터에 입력하는 방법이다. 멤버쉽 함수 (Membership Function:이하 MF라 약함)는 인간의 자연언어를 컴퓨터에 입력하기 위하여 퍼지이론에서 사용된다.이러한 MF에 의하여 자연어적인 표현방식이나 불확실한 표현등이 0과 1사이의 실수값으로 전환된다. 예를 들어 '약 5미터', '매우 크다', '꽤 아름답다' 등에 포함된 근사표현 (approximate explanation)등을 MF에 의하여 0과 1사이의 값으로 표현된다. 둘째는 컴퓨터내에서의 일련의 연산방식이다. 이를 위하여 max와 min연산자로 구성되어 있는 퍼지로직이 사용되며, 또한 퍼지합, 퍼지곱 등의 기본적인 연산작업이 확장원리 (extension principle)에 기초하여 적용된다. 이외에 보다 복잡한 의사결정을 위하여 퍼지관계 (fuzzy relations)와 퍼지추론 (fuzzy reasoning)등이 적용된다.

그림 1 삽입 (일반적인 지능정보처리)
그림 2 삽입 (멤버쉽 함수의 예)
그림 3 삽입 (퍼지로직 연산의 예)

2.2 퍼지집합의 기본정의

정의 1: X를 x에 의하여 표현되는 객체의 집합이라고 할때, X의 퍼지집합 A는 다음과 같이 x와 그에 대한 MF인 $\mu_A(x)$의 집합으로 표현된다.

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$$

일반적으로 $\mu_A(x)$는 MF라고 하며, 이는 X를 멤버쉽 공간 M으로 사상시키는 함수이다.

이때 M이 0과 1로만 구성되어 있으면 A는 비퍼지 (nonfuzzy) 또는 crisp이라고 한다. MF가 취할 수 있는 값의 영역은 최대치가 유한한 (finite)한 비음수 실수값을 취할 수가 있으나, 일반적으로 최대치가 1이 되도록 정규화한다.

예1) 어떤 부동산업자가 고객에게 제공하는 주택의 등급을 나누고자 한다. 주택의 안락도를 측

정하는 지표중의 하나가 침실의 갯수이다. $X=\{1,2,3,4,...,10\}$ 를 침실의 갯수 x로 설명되는 집합이라고 하자. 이때, A를 "4인 가족을 위한 주택의 안락도 형태"를 나타내는 퍼지집합이라고 하면, A는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$A=\{(1,.2),(2,.5),(3,.8),(4,1),(5,.7),(6,.3)\}$$

즉 방이 3개이면 MF값이 .8이고 4개이면 MF값이 1로서 최대가 된다. 그러나 4인가족에게 있어서 방이 5개이상되면 MF값이 .7, .3으로서 점점 떨어지는 것을 알 수 있다.

예2) 퍼지집합 A="10과 가까운 정수"를 다음과 같이 표현할 수도 있다.

$$A=0.1/7+0.5/8+0.8/9+1/10+0.8/11+0.5/12+0.1/13$$

이는 정의 1에서 표현된 퍼지집합의 표기방식의 또다른 형태이다.

정의 2: 퍼지집합 A의 보충 (support)은 $S(A)$으로 나타내며, 이는 $\mu_A(x)>0$인 모든 $x\in X$의 crisp 집합이다.

정의 2에 의하여, 예제 1에서 언급한 퍼지집합 A의 $S(A)$는 $S(A)=\{1,2,3,4,5,6\}$ 이다. $\{7,8,9,10\}$은 $S(A)$에 포함되지 않는다.

정의 3: 적어도 α정도로 퍼지집합 A에 포함되는 요소들의 (crisp)집합을 "α-level" 집합 또는 "α-cut" 집합이라 하며 다음과 같이 정의된다.

$$A_\alpha=\{x\in X \mid \mu_A(x)\geq\alpha\}$$

이때 부등호가 $>$이면 "strong α-cut" 집합이라 한다.

예3) 예1에 대한 α-level집합은 다음과 같다.

$$A_{0.2}=\{1,2,3,4,5,6\}$$
$$A_{0.5}=\{2,3,4,5\}$$
$$A_{0.8}=\{3,4\}$$
$$A_1=\{4\}$$

그러나, $\alpha=0.8$에 대한 strong α-level집합은 $\{4\}$이다.

정의 4: 퍼지집합 $\dot{A}$가

$$\mu_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ \geq\ \min(\mu_A(x_1),\mu_A(x_2)),\qquad x_1,x_2\in X,\ \lambda\in[0,1]$$

이면, 퍼지집합 A는 convex이다.

모든 α-level집합이 convex이면 해당 퍼지집합도 convex이다.

정의 5: 유한한 퍼지집합 A에 대해서, 카디날리티 (cardinality) 또는 파워 (power) $|A|$는 다음과 같이 정의된다.

$$|A|=\sum_{x\in X}\mu_A(x)$$

또한 $\|A\|=\dfrac{|A|}{|X|}$는 퍼지집합 A의 상대적 카디날리티라고 한다.

예 4) 예 1에 대한 카디날리티는 다음과 같다.

$$|A|=.2+.5+.8+1+.7+.3=3.5$$

이때 상대적 카니날리티는 $\|A\|=\dfrac{3.5}{10}=0.35$이다.

<퍼지집합에 대한 기본 집합연산>

정의 6:(교집합) $C=A\cap B$에 대한 MF $\mu_C(x)$는 다음과 같이 정의된다.

$$\mu_C(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},\quad x\in X$$

정의 7:(합집합) $D=A\cup B$에 대한 MF $\mu_D(x)$는 다음과 같이 정의된다.

$$\mu_D(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},\quad x\in X$$

정의 8:(보수) 퍼지집합 A의 보수 (complement), $\overline{A}$에 대한 MF는 다음과 같이 정의된다.

$$\mu_{\overline{A}}=1-\mu_A(x),\quad x\in X$$

예 5) 예 1에서 새로운 퍼지집합 B를 "큰 형태의 집"이라고 하고,

$$B=\{(3,.2),(4,.4),(5,.6),(6,.8),(7,1),(8,1)\}$$

로 정의하자. 이때 정의 6,7,8에 의한 연산은 다음과 같다.

$$C=A\cap B=\{(3,.2),(4,.4),(5,.6),(6,.3)\}$$
$$D=A\cup B=\{(1,.2),(2,.5),(3,.8),(4,1),(5,.7),(6,.8),(7,1),(8,1)\}$$
$$\overline{B}=\{(1,1),(2,1),(3,.8),(4,.6),(5,.4),(6,.2),(9,1),(10,1)\}$$

그러나, 예 5와 같이 각 요소에 대한 MF값이 구체적으로 주어진 경우가 아니라, 함수로 주어진 경우라면 구체적으로 min과 max연산자를 적용하여 연산을 하여야 한다.

예 6) 퍼지집합 A = "10보다 상당히 큰 x", B = "11과 근사한 x"에 대한 각각의 MF가 다음과 같다고 하자.

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, & x\le 10\\ (1+(x-10)^{-2})^{-1}, & x>10\end{cases}$$
$$\mu_B(x)=(1+(x-11)^4)^{-1}$$

이때 $A\cup B$와 $A\cap B$에 대한 MF는 다음과 같다

$$\mu_{A\cup B}=\max[(1+(x-10)^{-2})^{-1},(1+(x-11)^4)^{-1}],\quad x\in X$$
$$\mu_{A\cap B}=\begin{cases}\min[(1+(x-10)^{-2})^{-1},(1+(x-11)^4)^{-1}] & \text{for } x>10\\ 0 & \text{for } x\le 10\end{cases}$$

2.3 퍼지집합에 대한 대수연산

정의 9: n개의 퍼지집합 $A_1,\ldots,A_n$의 카티지안 곱 (cartesian product)은 X_1 x ... x X_n 공간에서 정의되는 퍼지집합이며 해당 MF는 다음과 같다.

$$\mu_{(A_1 \mathrm{x} \ldots \mathrm{x} A_n)}=\min_i\{\mu_{A_i}(x_i)|x=(x_1,\ldots,x_n),\quad x_i\in X_i\}$$

정의 10: (대수합, probabilistic sum) 퍼지집합 $C=A+B$ 은 $C=\{(x,\mu_{A+B}(x)|x\in X\}$ 로 정의되며 이때 MF는 다음과 같다.

$$\mu_{A+B}(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x)$$

정의 11: (제한 합, bounded sum) $C=A\oplus B$은 $C=\{(x,\mu_{A\oplus B}(x))|x\in X\}$ 로 정의되며, 이때 MF는 다음과 같다.

$$\mu_{A\oplus B}(x)=\min\{1,\mu_A(x)+\mu_B(x)\}$$

정의 12: (제한 차, bounded difference) $C=A\ominus B$ 은 $C=\{(x,\mu_{A\ominus B}(x))|x\in X\}$ 로 정의되며, 이때 MF는 다음과 같다.

$$\mu_{A\ominus B}(x)=\max\{0,,\mu_A(x)+\mu_B(x)-1\}$$

정의 13: (대수곱) $C = A \times B$ 은 $C = \{(x, \mu_A(x)\mu_B(x) | x \in X\}$ 로 정의된다.

예 7) 두 퍼지집합 $A(x) = \{(3, .5), (5, 1), (7, .6)\}$ 와 $B(x) = \{(3, 1), (5, .6)\}$ 가 있다고 하자. 정의 9에서 13까지를 이용한 계산은 다음과 같다.

$$A \times B = \{[(3;3), .5], [(5;3), 1], [(7;3), .6], [(3;5), .5], [(5;5), .6], [(7;5), .6]\}$$
$$A^2 = \{(3, .25), (5, 1), (7, .6)\}$$
$$A + B = \{(3, 1), (5, 1), (7, .6)\}$$
$$A \oplus B = \{(3, 1), (5, 1), (7, .6)\}$$
$$A \ominus B = \{(3, .5), (5, .6)\}$$
$$A\ B = \{(3, .5), (5, .6)\}$$

2.4 기본 퍼지집합 개념의 확장

지금까지 우리는 MF가 정확히 정의될 수 있는 퍼지집합에 대하여 설명을 하였다. 그러나, 사실 의사결정자가 MF에 대한 정확한 정의를 하면서 퍼지집합을 생각한다는 것은 어려운 일이다. 따라서 지금까지 우리가 언급한 퍼지집합을 "Type-1 퍼지집합"이라고 한다면, MF자체도 퍼지집합으로 간주하는 보다 일반적인 형태의 "Type-2 퍼지집합"을 정의할 수가 있다. 그렇게 되면 우리가 지금까지 Type-1 퍼지집합에 대하여 정의했던 교집합, 합집합, 보수등은 Type-2 퍼지집합에 제대로 적용될 수가 없으므로, 이를 위하여 "확장원리" (extension principle)를 적용한다 (Zadeh 1973a, Dubois &Prade 1980a). 우선 두개의 Type-2 퍼지집합인 A와 B가 다음과 같이 정의된다고 하자.

$$A(x) = \{(x, \mu_A(x))\}, \quad where\ \mu_A(x) = \{(u_i, \mu_{u_i}(x)) | x \in X, u_i, \mu_{u_i}(x) \in [0, 1]\}$$
$$B(x) = \{(x, \mu_B(x))\}, \quad where\ \mu_B(x) = \{(v_j, \mu_{v_j}(x)) | x \in X, v_j, \mu_{v_j}(x) \in [0, 1]\}$$

이때 이 두 Type-2 퍼지집합에 대한 교집합, 합집합, 보수는 다음과 같이 정의된다.

교집합:
$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cap \mu_B(x)$$
$$\doteq \{(w, \mu_{A \cap B}(w)) | w = \min\{u_{i,} v_j\}, u_i, v_j \in [0, 1]\}$$

where $\mu_{A \cap B}(w) = \sup_{w = \min\{u_i, v_j\}} \min\{\mu_{u_i}(x), \mu_{v_j}(x)\}$ 이다.

합집합:
$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \cup \mu_B(x)$$
$$= \{(w, \mu_{A \cup B}(w)) | w = \max\{u_{i,} v_j\}, u_i, v_j \in [0, 1]\}$$

where $\mu_{A \cup B}(w) = \sup_{w = \max\{u_i, v_j\}} \min\{\mu_{u_i}(x), \mu_{v_j}(x)\}$ 이다.

보수:
$$\mu_{\bar{A}} = \{[(1 - u_i), \mu_{\bar{A}}(u_i)]\}$$

2.5 퍼지집합과 퍼지측정

"퍼지"란 모호하다는 뜻인데, 주로 인간에 관련된 모호함을 의미한다. 기존의 경영과학에서 의미하는 불확실성이란 주로 확률적 불확실성을 의미하였다. 그러나, 퍼지이론에서의 불확실성이란 "퍼지성" (fuzziness)을 뜻한다. 퍼지성이란 "아름답다", "젊다", "키가 크다", "춥다" 등과 같은 뜻과 정의에서 야기되는 불확실성을 말하는데, 확률적인 불확실성과는 달리 주관적인 불확실성을 포함하는 포괄적인 개념이다.

퍼지집합과 기존의 집합과의 차이는 해당 집합을 표기하는 특성함수를 보면 쉽게 알 수가 있다. 즉, 기존의 집합의 경우 특성함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\chi_A: X \in \{0,1\}.$$

이는 X의 요소 x가 A에 포함되면 $\chi_A(x)=1$ 이고, 그렇지 아니면 $\chi_A(x)=0$ 이라는 의미이다. 이러한 특성함수의 영역인 {0,1}을 실수값 구간인 [0,1]로 확장한 것이 퍼지집합이다. 따라서 X의 퍼지집합 A는 다음과 같은 특성함수인 멤버쉽 함수, 즉 MF로 정의된다.

$$\mu_A: \quad X \rightarrow [0,1].$$

$\mu_A(x) \in [0,1]$ 은 X의 요소 x가 A에 속하는 멤버쉽의 정도를 의미한다. {0,1}이 μ_A가 취하는 영역인 [0,1]에 포함되기 때문에 χ_A는 μ_A의 특수한 경우로 간주할 수 있다. 결국 기존의 집합은 퍼지집합의 특수한 경우라고 말할 수가 있는 것이다. 그럼, μ_A는 어떻게 결정되는가? 이는 의사결정자의 주관에 의하여 결정된다. 즉, 주어진 문제의 특성과 이에 대한 의사결정자의 판단이 해당 문제의 MF를 결정한다는 것이다.

MF의 의미를 파악하는 한 방법으로서, 퍼지집합의 제창자인 L.A. Zadeh에 의하여 제시된 '가능성 이론' (possibility theory)을 들 수 있다. 이는 퍼지집합의 MF를 '가능성 분포함수' (possibility distribution function)로 간주할 수 있으며, 그렇게 되면 확률 (probability)에 의하여 설명되어 왔던 불확실성 (uncertainty)이 퍼지이론으로도 처리될 수가 있다는 것이다. 그러나, 이러한 가능성 분포함수는 확률에서 말하는 분포함수, 즉 누적밀도함수 (cumulative density function)는 아니다. 오히려 밀도함수 (density function)와 유사한 것이 된다. 이러한 퍼지집합의 구체적인 측정치인 퍼지값 (fuzzy measure)은 다음과 같이 2^X에서 구간 [0,1]로 사상되는 집합함수로 정의된다. g를 하나의 퍼지값으로 간주하자.

i) $g(\emptyset) = 0$,

ii) $g(X) = 1$,

iii) $\forall A, \forall B \subseteq X, \ A \subseteq B \rightarrow g(A) \leq g(B)$.

가능성값 (possibility measure)은 이러한 퍼지값의 하나이다. 가능성 분포함수는 가능성값의 분포를 나타내기 때문에, 가능성값 Π는 다음과 같이 정의된다.

$$\forall A, \forall B, \ \Pi(A \cup B) = \Pi(A) \vee \Pi(B)$$

이때 연산자 $\vee$는 maximum을 의미하다. $A \cap B = \emptyset$이면 연산자 $\vee$는 확률값에서의 +로 된다. 그림 4는 1차원 실수값 R^1에서의 가능성 분포의 예를 보여주고 있다. 그림 4에서 $\Pi(A) = 0.9$, $\Pi(B) = 0.7$이다. 이때 $\Pi(A \cup B) = 0.9 = 0.7 \vee 0.9$이다. 따라서 가능성값은 퍼지값의 성질을 갖고 있음을 알 수가 있다.

그림 4 삽입 (1차원 실수공간에서의 가능성 분포)

한편, X에 속하는 모든 퍼지집합 A에 대하여, $g'(A) = 1 - g(\overline{A})$ 라고 할때, 이는 위와 같은 퍼지값의 조건 i), ii), iii)을 모두 만족하며 따라서 이 또한 퍼지값이 된다. 이를 특별히 '필요성값' (necessity measure)이라 하는데 향후 N이라는 표기를 사용한다. 따라서 필요성값은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$N(A) = g'(A) = 1 - \Pi(\overline{A})$$

이러한 필요성값은 다음과 같은 조건을 만족시킨다.

$$N(A \cap B) = N(A) \wedge N(B)$$

여기서 $\wedge$은 minimum을 의미한다. 따라서 가능성값 Π와 필요성값 N은 $N(A) \leq \Pi(A)$와 같은 관계식을 갖게 된다.

3. 퍼지사건에 대한 모형

3.1 기본개념

F를 퍼지사건 (fuzzy event)이라 하고, 해당 MF를 μ_F라고 하면 F가 발생할 확률 $P(F)$은 다음과 같다 (연속형을 가정).

$$P(F) = \int_{\Omega} \mu_F(x)\, dP, \qquad \mu_F: \Omega \rightarrow [0,1].$$

퍼지사건에 대한 속성은 일반적인 확률사건에 대한 속성과 일치한다. 즉, 두 퍼지사건 A와 B에 대하여

i) $A \subset B$이면 $P(A) \le P(B)$,

ii) A의 보수 $\overline{A}$의 확률은 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,

iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 이다.

또한, 만약 표본공간 Ω이 퍼지 orthogonal하게 구분되어지면 (즉, fuzzy orthogonal partition),

$\sum_j \mu_{F_j}(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega$ 가 성립한다. 이때 모든 퍼지사건 F_j에 대하여 $\sum_j P(F_j) = 1$이 성립한다. 또한 두 퍼지사건 A와 B가 독립이면 $P(A, B) = P(A)P(B)$ 이고, 조건부 확률도 $P(A|B) = \dfrac{P(A,B)}{P(B)}$ 로 정의된다.

3.2 퍼지 베이지안 모형

"이와 비슷한 상황이라면 어떤 종류의 의사결정이 좋을까?" 이러한 의사표현은 물론 퍼지한 내용을 전제로 하고 있다. 꼭 정확하게 말을 할 수는 없다고 하더라도 이와 같은 상황하에서의 의사결정의 종류를 알고 싶다는 것이다. 통계학에서는 베이지안 정리 (Bayesian Theorem)이라는 것이 유용한 통계적 의사결정에 사용되고 있다. 이러한 베이지안 정리를 퍼지한 상황으로 일반화 시킨 것이 퍼지 베이지안 모형이다.

퍼지 베이지안 의사결정모형을 $\langle \zeta, D, u, \xi \quad \Theta \rangle$ 로 표현하자. $D = \{d_1, \ldots, d_r\}$ 는 의사결정 집합이고, $\Theta = \{\theta\}$ 는 상태공간, $u(d_j, F_i)$는 퍼지 orthogonal하게 구분되는 (fuzzy orthogonal partition) 퍼지사건 집합 $\zeta = \{F_1, \ldots, F_n\}$ 중의 하나인 퍼지사건 F_i에 대한 효용함수이다. 이때의 효용함수 $u(d_j, F_i)$ 는 상태공간 $D \mathrm{x} \zeta$에서 정의된다. 따라서 의사결정자는 사전확률 $\xi(\theta)$에 기초하여, 효용기대치를 극대화하는 의사결정을 찾아야 한다.

$$U(d_j) = \sum_{k=1}^{n} u(d_j, F_k) P(F_k)$$

이때 최적의사결정 d^0 는 $P(F_k) = \int_{\Theta} \mu_{F_k}(\theta)\xi(\theta)d\theta$ 와 같은 퍼지사건 F_k에 대한 확률이 주어져 있을 때 위에서 소개한 $U(d_j)$를 최대화하는 의사결정이다.

3.2.1 사후정보가 확률적 정보일때

확률적 정보로서의 X를 간주하여 퍼지 베이지안에 의하여 최적 의사결정을 유도하자. 이는 조건부 확률 $f(x|\theta)$에 의하여 측정된다. 이러한 x가 주어질때, 퍼지사건 F_k의 사후확률은 다음과 같이 정의된다.

$$P(F_k|x) = \frac{1}{f(x)} \int_{\Theta} \mu_{F_k}(\theta) f(x|\theta) \xi(\theta) d\theta$$

이때 $f(x) = \int_{\Theta} f(x|\theta)\xi(\theta)d\theta$ 이다. 따라서 이와같은 두 식을 이용하여 기대효용은 다음과 같다.

$$U(d_j|x) = \sum_{k=1}^{n} u(d_j, F_k)P(F_k|x)$$

이러한 기대효용을 최대화 하는 의사결정 d_x^0이 최적의사결정이 된다.

$$U(d_x^0|x) = \max_j \; U(d_j|x)$$

이때 추가적인 사후정보 X가 사용되므로써 증가되는 기대효용 $V(X)$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V(X) &= U(d_X^0) - U(d^0) \\ &= \int_X U(d_x^0|x)f(x)dx - U(d^0) \end{aligned}$$

예:주사위를 던질때의 상태공간은

$$\begin{aligned} \Theta &= \{\theta_1, \ldots, \theta_6\} \\ &= \{1, \ldots, 6\} \end{aligned}$$

이다. 한편, 두개의 퍼지사건 F_1="상대적으로 주사위를 많이 던지는 경우"과 F_2="상대적으로 주사위를 적게 던지는 경우"가 있다고 하자. 그리고 두개의 의사결정 형태인 d_1과 d_2가 있으며, 이들 의사결정은 퍼지사건의 상태에 따라서 영향을 받는다고 하자. 퍼지사건의 상태는 orthogonal partition이 된다고 하자. 의사결정과 퍼지상태에 의하여 결정되는 퍼지효용함수는 다음 표 1과 같다고 하자.

표 1. 퍼지효용함수 $u(d_j, F_i)$

의사결정 \ 퍼지상태	상대적으로 주사위를 많이 던지는 경우 (F_1)	상대적으로 주사위를 적게 던지는 경우 (F_2)
d_1	20	-10
d_2	10	45

이상의 정보에 의하여 각 의사결정에 대한 효용을 다음과 같이 결정할 수가 있다.

$$U(d_1) = 20 \text{ x } 0.5 - 10 \text{ x } 0.5 = 5,$$
$$U(d_2) = 10 \text{ x } 0.5 + 45 \text{ x } 0.5 = 27.5$$

따라서 최적 의사결정은 d_2이며 그때의 효용은 27.5이다. 한편, 추가적인 정보로서 주사위를 한번 더 던져서 (predictive dice) 상태공간, 즉 1에서 6까지의 숫자를 맞추도록 하였다. 이때의 적중률은 80%였다. 표 2는 조건부 확률 $f(x_j|\theta_i)$을 제시하고 있다. 그리고 표 3은 확률 $f(x_j)$와 사후확률 $f(\theta_i|x_j)$을 보여주고 있으며, 표 4에는 퍼지 조건부확률인 $P(F_k|x_j)$가 나타나 있다. 따라서, 예를 들어 x_1이 관측되었을 때에 d_1과 d_2의 기대효용은 다음과 같다.

$$U(d_1|x_1) = 20 \text{ x } 0 - 10 \text{ x } 1 = -10,$$
$$U(d_2|x_2) = 10 \text{ x } 0 - 45 \text{ x } 1 = 45$$

따라서 x_1이 관측되었을 때에도 최적 의사결정은 d_2가 된다. 또다른 x_j가 관측이 된 경우의 최적 의사결정과 그에 대한 기대효용은 표 5에 요약이 되어 있다. 따라서, 표 3과 표 5의 내용을 기초로 하여, 우리는 추가적인 정보 x_j에 따른 의사결정으로 부터 기대되는 기대효용을 구할 수가 있다. 즉,

$$\begin{aligned} U(d_x^0) &= 45 \text{ x } 0.15 + 44.37 \text{ x } 0.183 + 36.6 \text{ x } 0.167 + 18.4 \text{ x } 0.167 + 19.46 \text{ x } 0.183 + 20 \text{ x } 0.15 \\ &= 30.616 \end{aligned}$$

이 된다. 따라서 확률적 정보 X로 부터 얻을 수 있는 정보가치는

$$V(X) = 30.616 - 27.5 = 3.116$$

이 된다.

표 2. 조건부 확률 $f(x_j \mid \theta_i)$

θ_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
θ_1	0.8	0.2				
θ_2	0.1	0.8	0.1		0	
θ_3		0.1	0.8	0.1		
θ_4			0.1	0.8	0.1	
θ_5		0		0.1	0.8	0.1
θ_6					0.2	0.8

표 3. $f(x_j)$와 사후확률 $f(\theta_i \mid x_j)$

j	$f(x_j)$	$f(\theta_i \mid x_j)$					
		θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
1	0.150	0.889	0.111				
2	0.183	0.181	0.728	0.091		0	
3	0.167		0.100	0.800	0.100		
4	0.167			0.100	0.800	0.100	
5	0.183		0		0.091	0.728	0.181
6	0.150					0.111	0.889

표 4. 퍼지 조건부확률 $P(F_k \mid x_j)$

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$P(F_1 \mid x_j)$	0	0.018	0.240	0.760	0.982	1.000
$P(F_2 \mid x_j)$	1.000	0.982	0.760	0.240	0.018	0

표 5. x_j에 따른 최적 의사결정 d^0_{xj} 과 기대효용

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
d^0_{xj}	d_2	d_2	d_2	d_2	d_1	d_1
$U(d^0_{xj} \mid x_j)$	45	44.37	36.6	18.4	19.46	20

3.2.2 사후정보가 퍼지정보일때

한편, 추가적인 정보로서 주사위를 한번 더 던져서 (predictive dice) 상태공간, 즉 1에서 6까지의 숫자를 맞추도록 할 때 던지는 주사위의 횟수를 "많은 수 (M_1)", "평균적인 수 (M_2)", "적은 수 (M_3)"와 같이 퍼지한 정보로 주어졌다고 하자. 이때, 이러한 퍼지정보 원천을 $M = \{M_1, M_2, M_3\}$이라 할때 이는 X에 대한 퍼지사건들이다. 이에 대한 MF는 표 6과 같다고 하자.

표 6. 퍼지사건 M_j에 대한 멤버쉽 함수

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$\mu_{M1}(x_j)$	0	0	0	0	0.5	1
$\mu_{M2}(x_j)$	0	0.5	1	1	0.5	0
$\mu_{M3}(x_j)$	1	0.5	0	0	0	0

이러한 퍼지사건이 발생할 확률은 $P(M_j) = \int_X \mu_{M_j}(x) f(x) dx$이며 이를 이용하여 세가지 퍼지사건의 발생확률을 구하면 다음과 같다. $f(x)$는 표 3에 제시되어 있다.

$$P(M_1) = 0 \times .150 + 0 \times .183 + 0 \times .167 + 0 \times .167 + 0.5 \times .183 + 1 \times .150 = .2415$$
$$P(M_2) = 0 \times .150 + .5 \times .183 + 1 \times .167 + 1 \times .167 + 0.5 \times .183 + 0 \times .150 = .517$$
$$P(M_3) = 1 \times .150 + .5 \times .183 + 0 \times .167 + 0 \times .167 + 0 \times .183 + 0 \times .150 = .2415$$

한편, 이러한 퍼지정보 M가 주어졌을 때 퍼지사건 F_1, F_2 의 사후확률은 다음과 같은 공식으로 구할 수 있다.

$$P(F_k|M_j) = \frac{1}{P(M_j)} \int_\Theta \int_X \mu_{F_k}(\theta) \mu_{M_j}(x) f(x|\theta) \xi(\theta) d\theta dx$$

따라서,

$$P(F_1|M_1) = P(F_2|M_3) = 0.994,$$
$$P(F_1|M_2) = P(F_2|M_2) = 0.05,$$
$$P(F_1|M_3) = P(F_2|M_1) = 0.006.$$

이상의 결과를 종합하여, 최적의사결정의 기대효용은 $U(d_M^0) = 29.821$ 이고, 퍼지정보 M에 의한 정보가치는 $V(M) = 2.321$ 이다.

일반적으로 $V(X) \geq V(M) \geq 0$의 관계가 성립한다.

4. 결론

지금까지 퍼지집합 이론에 대한 기본적인 개념과 경영과학에 있어서의 그 활용에 대하여 언급하였다. 물론 이정도의 내용으로 퍼지이론에 관한 모든 내용을 소개했다고는 말할 수 없다. 그러나, 우리가 여기서 한가지 짚고 넘어가야 할 것은 퍼지이론은 결코 이론을 위한 학문이 아니며, 그 출발점 자체가 매우 실용적인 학문이라는 것이다. 물론 퍼지이론이 우리가 오늘날 당면하고 있는 모든 문제를 풀 수 있는 것은 아니지만, 한가지 분명한 것은 지금까지 기존의 방법이 제시할 수 없었던 독특한 문제해결영역, 즉 소프트 컴퓨팅 (Soft Computing) 영역을 제공할 수 있다는 것이다. 모든 학문에 있어서의 공통적인 문제는 바로 자료내의 불확실성에 관한 효과적인 처리에 관한 문제이다. 또한 이를 바탕으로 내려야 하는 의사결정의 질을 제고하는 것이다. 기존의 확률이론이 해결할 수 없는 면을 퍼지이론은 훌륭하게 커버하고 있다. 더우기 경영과학 분야와 같이 의사결정 자체의 과정과 결과가 중요시 되는 학문에서는 말할 나위가 없다. 이러한 의미에서 본 논고에서 언급한 다양한 이론을 시스템적으로 결합한 퍼지 의사결정지원시스템 (fuzzy decision support system)의 개발은 의미가 있을 것이다.

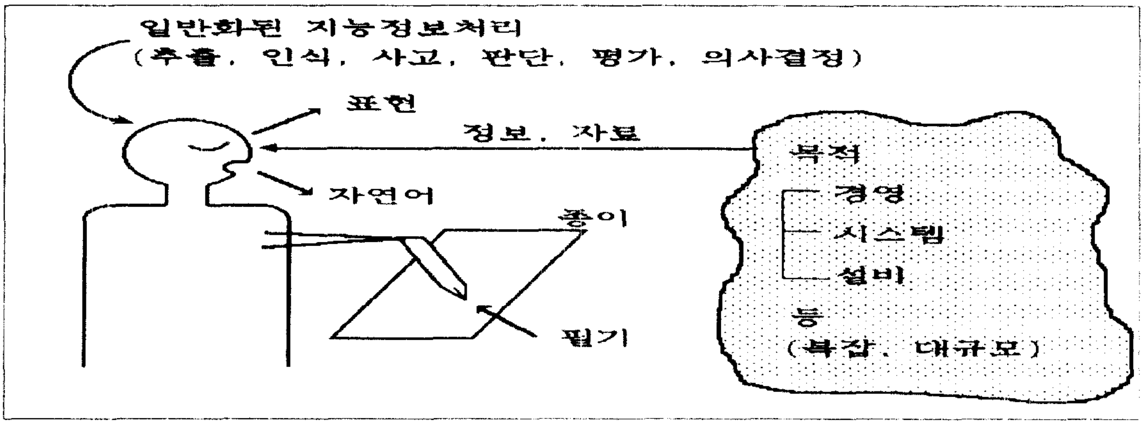

그림 1. 일반적인 지능정보처리

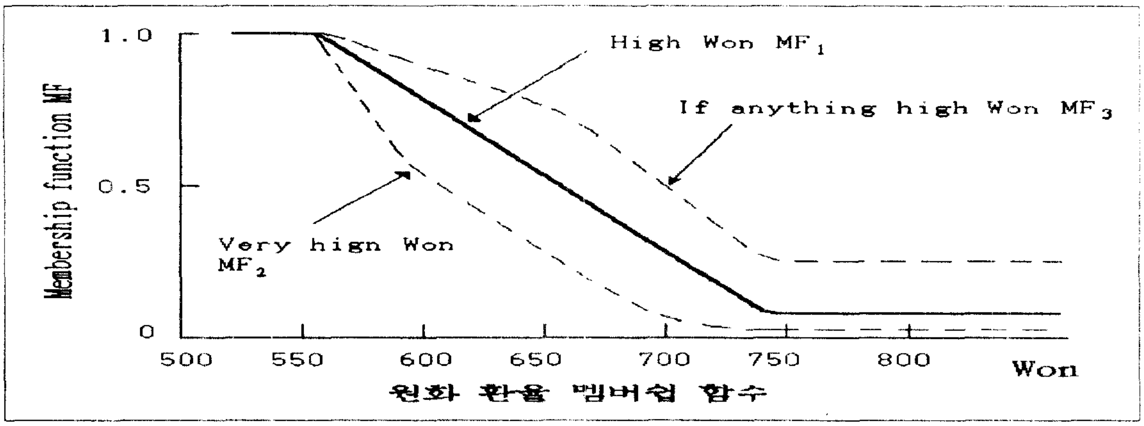

그림 2. 멤버쉽 함수예

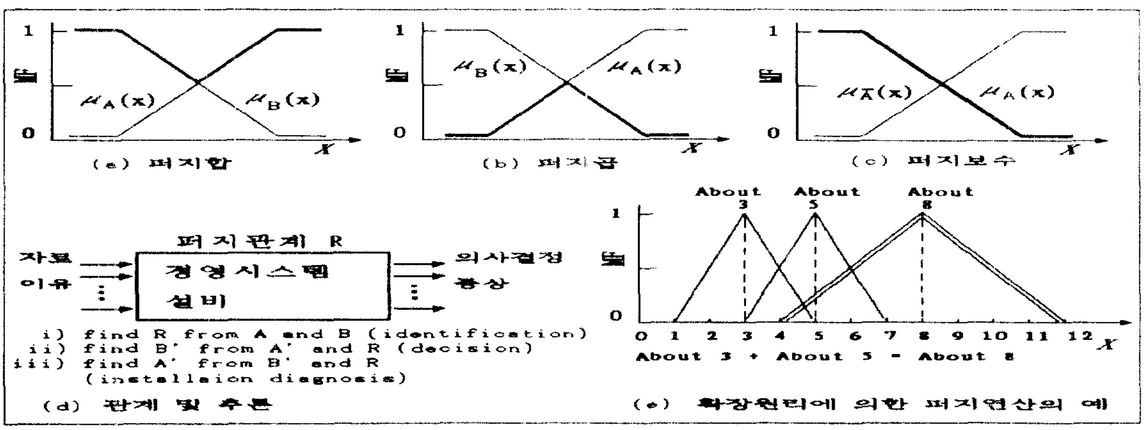

그림 3. 퍼지로직 연산의 예

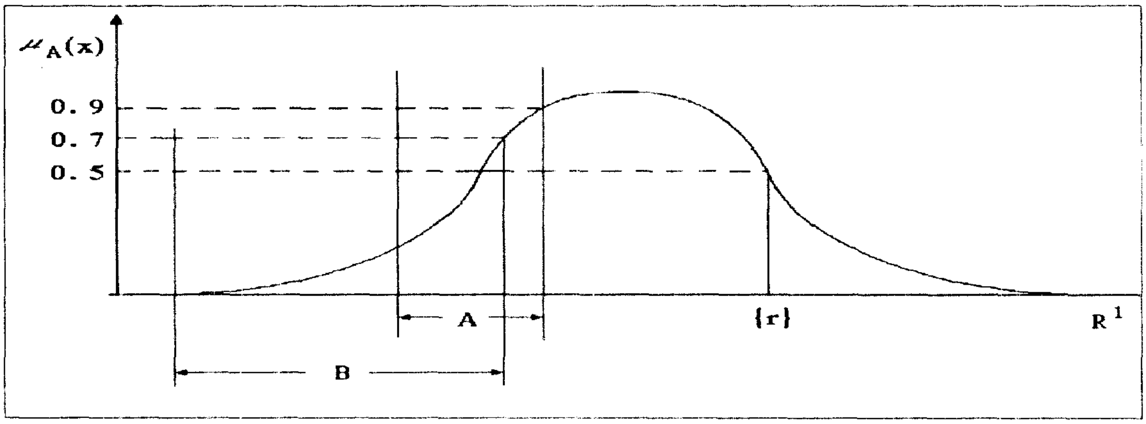

그림 4. 1차원 실수공간에서의 가능성 분포

참 고 문 헌

Dubois, D. & Prade, H. [1989]. Fuzzy sets, probability and measurement. *European Journal of Operations Research* 40, 135-154.

Zadeh, L.A. [1965]. Fuzzy sets. *Information and Control* 8, 338-353.

Zadeh, L.A. [1973]. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems, Man & Cybernetics* 3, 28-44.

Zadeh, L.A. [1983]. The role of fuzzy logic in the management of uncertainty in expert systems. *Fuzzy Sets and Systems* 11, 199-227.

Zimmermann, H.-J. [1983]. Using fuzzy sets in operational research. *European Journal of Operations Research* 13, 201-216.

Zimmermann, H.-J. [1991] Fuzzy Set Theory and Its Applications. 2nd Edition, *Kluewer Academic Publishers*.