수학과 構成

-수학의 구성적 성격에 관한 기초론적 연구-

閔 賛 泓

I. 서 론

현대의 수학기초론은 수학의 성격을 크게 두가지로 (형식적 성격 ; formality 과 구성적 성격 ; constructivity)부각시키고 있다. 수학의 이 두가지 성격은 현대 수학기초론의 가장 원시적이고 포괄적인 형태인 논리주의(logicism)의 주장 속에 이미 함축되어 있었고, 또 형식주의와 직관주의에 의해서 각각 분명하게 드러나고 있다.

수학을 '형식체계의 학(science of formal system)'으로 규정하고 있는 형식주의는 수학적 진술들이 그 자체로는 아무 의미도 없는 기호의 나열에 불과할 뿐이라고 주장함으로써 수학의 형식적 성격을 극명하게 표현하고 있는데, 그들에 따르면 수학적 대상은 그것이 존재한다고 가정해도 아무런 모순이 생기지 않으면 존재한다고 할 수 있다 (무모순성의 원리). 즉 수학적 대상은 무모순성의 원리에 의해서 가정되는(postulated) 것이다.

수학의 구성적 성격에 시선을 모으는 사람들은 위의 형식주의자들의 주장에 동조하지 않는다. 수학의 모든 대상은 구성되어진(constructed) 어떤 것, 즉 구성물(constructions)들이다. 따라서 수학에 있어서 어떤 대상이 존재한다는 주장은 그 대상이 구성되었다거나 또는 적어도 구성될 수 있다는 주장으로 이해되어야 한다(Esse est concipi).[1] 이런 점에서 수학은 구성적인 학문이다. 물론 우리는 모순적인 대상을 구성할 수는 없다. 따라서 수학적 대상이 구성물이라고 할 때, 이미 무모순성의 원리는 전제되고 있다. 그러나 구성적인 관점에서 볼 때, 존재의 가정이 무모순적이라는 것은 그 대상의 존재를 주장할 수 있기 위한 필요조건에 불과한 것이다.

한편 구성이란 무엇으로부터의 구성이다. 따라서 수학적 대상을 구성하기 위해 우리는 출발점을 갖지 않으면 안된다. 또 '구성'이라는 개념 자체가 대상을 산출하는 방식을 규정하고 있지도 않다. 다시 말해서 '구성'이라는 개념 자체 만으로부터는 "무엇으로 부터 어떻게 구성하는가"하는 점이 분명하게 밝혀지지 않는다. 따라서 수학이 구성적 학문이라는 데에는 동의하더라도 수학에 대해 전혀 다른 설명이 가능하게 된다.

"모든 순수수학은 불과 몇개의 논리적인 개념들을 통하여 정의될 수 있는 개념들만을 다

---

* 本論文은 1982年度 碩士學位 論文임.

1) Dummett, M.(1977) p. 7.

루고 있으며, 또 순수수학의 모든 명제는 몇개의 논리적인 원리들로 부터 연역될 수 있다"[2] 는 것을 보여줌으로써 환원주의의 모델이 되었던 논리주의(logicism)는 수학을 논리학으로 부터의 논리적 구성물(logical constructions from logic)로 간주한다. 논리주의자들은 수학이 어떤 주제(subject matter)를 가진 것이 아니라 개념들 사이의 순수한 관계를 다루는 것이며 또한 그 관계들이란 모순율이나 modus ponens 처럼 분석적인 성격을 가지고 있다는 것을 보여주려 하고 있는 것이다.[3] 여기서 우리는 논리주의자들의 의도가 '수학적 구성'의 인식론적 함축에 관련되고 있음을 알 수 있다.

한편, 직관주의자들(intuitionists)에 따르면 수학이란 정신적 구성물(mental construction)이며, 수학의 모든 정의와 증명은 구성적[4] 이어야 한다. 또 수학의 모든 정리는 어떤 구성(mental construction)이 완료되었음을 표현하는데 불과하다. 예컨대 "2 + 2 = 3 + 1"은 "나는 2 + 2라는 구성과 3 + 1이라는 구성을 완료하였으며, 그 두가지 구성이 같은 결과에 이른다는 것을 발견하였다"는 것을 의미한다.[5] 직관주의자들은 수학이 구성적이어야 한다는 원칙에 철저함으로써 고전 수학과 논리학을 거부하고 새로운 수학체계를 발전시키게 되는데, 이들의 새로운 수학, 즉 직관주의 수학(intuitionistic mathematics)은 구성주의 수학(constructive mathematics)의 전형으로 인정되고 있는 것이다.

이 글의 첫번째 목적은 논리주의와 직관주의에 있어서 '구성'의 개념이 어떻게 이해되고 있는가를 살펴봄으로써 수학의 구성적 성격의 해명에 접근하려는 것이다. 또 직관주의자들이 고전수학을 비구성적인 것으로 거부하면서 논리주의까지도 고전수학에 포함시키고 있는데, 논리주의가 수학적 대상의 구성적 성격을 이해하고 있었음을 밝힘으로써 직관주의자들의 비판이 지나치다는 것을 보여주는 것이 이글의 두번째 목적이 된다.

II. 수학 — 논리학으로부터 논리적 구성물

II — 1. Peano 공리체계

수학을 논리학으로 부터의 논리적 구성물로 간주할 수 있기 위해서 우리는 먼저 수학과 논리학의 범위를 확실히 해두지 않으면 안된다. 수학을 논리학으로 부터 연역한다고 하면서 논리학의 범위를 확장해 버린다면 그러한 연역은 성공적이라고 평가될 수 없을 것이다. 실제로 논리주의의 주창자중 한 사람이었던 Russell은 그러한 비판을 받고 있다.[6] 따라서 우리는 논리학을 명제산(propositional calculus)과 양화이론(quantification theory)으로 한정하기로 하자.

2) Russell, B.(1903) p. xv.

3) Putnam, H. & Benacerraf, P. (1964) Introduction p. 9.

4) '구성적'이라는 개념은 뒤에 자세히 논하게 된다.

5) Heyting, A. "Disputations" Putnam & Benacerraf op cit. p. 61.

6) Putnam, H. "The Thesis that mathematics is logic" Putnam *Mathematics Matter and Method*. (1979)에 수록되어 있음 pp. 12f.

한편 고전 수학은 자연수에 대한 Peano의 공리체계로 부터 연역될 수 있다.[7)]

Peano의 공리체계는 다음 세개의 무정의 용어(primitive terms)와 다섯개의 공리에 근거하고 있다.

〈무정의 술어〉: O, Nr, Sc.

〈공리 1〉 $O \in Nr$.

〈공리 2〉 $(x) : x \in Nr . \supset . Sc(x) \in Nr$.

〈공리 3〉 $(x)(y) \therefore x \in Nr . y \in Nr . \supset : Sc(x) = Sc(y) . \supset . x = y$.

〈공리 4〉 $(x) : x \in Nr . \supset . Sc(x) \neq O$.

〈공리 5〉 $(A) \therefore O \in A . (x)(x \in A . \supset . Sc(x) \in A) . \supset . A = Nr$.[8)]

무정의 술어 O는 수 O(zero)를, Nr은 모든 자연수의 집합을, Sc는 계승수(successor)를 의미하고 있다. 연산(operation)은 반복정의(recursive definition)를 통하여 정의된다. 덧셈(+)은 1) $x + O = x$, 2) $x + Sc(y) = Sc(x + y)$, 곱셈(•)은 1) $x \cdot O \doteq O$, 2) $x \cdot Sc(y) = x \cdot y + x$로 정의된다.

정수(integers)는 두 자연수 사이의 관계로 정의된다. 즉 '+1'은 (n+1, n)으로 '−1'은 (n, n+1)로 정의될 수 있다. 결국 모든 정수는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)로 표시될 수 있다. 유리수는 다시 정수의 순서쌍으로 정의된다. 또 연속체(continuum)를 형성하는 실수는 순서집합을 이루고 있는 유리수 집합의 Dedekind Cut에 의하여 구성된다. 실수가 구성됨으로써 수학적 해석학(mathematical analysis)가 가능하게 된다. 한편 기하학은 Descartes의 해석기하의 방법을 통해서 대수학과 같이 다루어질 수 있으며, 허수(imaginary number)는 실수의 순서쌍으로 구성되는 복소수의 형태로 다루어진다.

결국 Peano의 공리체계는 수학의 산술화(arithmetization)를 완성하고 있다. 이제 논리주의의 시도를 추적하기 위하여 우리가 할 일은

1) Peano체계의 무정의 술어들을 논리적 개념들로 부터 분명한 정의를 통하여 연역해내고,
2) Peano 체계의 공리들을 순수하게 논리적인 연역을 통하여 논리학의 공리들로 부터 증명하는 일이다.[9)]

Ⅱ−2. Peano 공리체계에서 논리학으로

1. 개념의 구성

Peano체계는 O, Nr, Sc 등의 개념들이 이해되어 있음을 전제로 하고 있으며, 물론 그것들은 논리학의 개념들이 아니다. 이제 위 개념들을 논리학의 개념들로부터 구성하는 데에

7) Russell, B.(1919) CH. 1.

8) Russell (1919) CH 1.〈공리 5〉는 Russell이 '성질'에 대해서 설명한 것을 '집합'에 대해서 표기하였다. '성질'과 '집합'에 대해서는 뒤에 말하게 된다.

9) Carnap, R. (1931) Putnam & Benacerraf op cit. p. 34와 비교.

로 나아가 보자.

수(cardinal number)는 집합의 성질(property)이다. 집합의 성질이 집합의 원소의 성질과 구분된다는 것은 명백하다. 예컨대,

베드로는 사도이다.
사도는 열두명이다.
∴ 베드로는 열 두명이다.

와 같은 논증은 집합의 성질과 집합의 원소의 성질이 구분되어야 한다는 것을 잘 보여주는 오류추리이다. 또 개별적인 수가 그 수 만큼의 원소를 가진 집합과 같지 않다는 것도 분명하다. 예컨대 '3'은 '김씨''이씨''박씨'로 구성된 세사람의 집합과 같지 않다. '3'은 세개의 원소를 가진 모든 집합이 가지는 성질이다.

한편, 성질은 집합으로 표시될 수 있다. "Socrates는 사람이다"는 문장은 "Socrates는 모든 사람의 집합의 한 원소이다"라고 표현할 수 있다. 이 경우 사람(human)이라는 성질은 '사람인 것의 집합(a class of all human being)'이라는 집합으로 표시되고 있다. 집합과 성질의 차이는 집합은 원소가 같으면 같은데 반해, 성질은 그 성질을 소유하는 대상이 같아도 같은 것으로 생각되지 않는다는 점이다. 그러나 적용되는 대상이 같으면 성질은 같다고 제한함으로써 성질과 집합은 동일하게 취급될 수 있다.[10] (이렇게해서 논리주의의 언어(logistics)는 외연적(extensional) 언어로 된다.)

이제 우리는 집합의 성질을 집합의 집합으로 쓸 수 있게 되었다. 따라서 수는 집합의 집합이다. 3은 세개의 원소를 가진 모든 집합의 집합이다. 그러나 이러한 설명은 아직 순환적이다. '김씨''이씨''박씨'로 이루어진 집합이 3의 원소라는 것을 어떻게 아는가? 세어보았더니 세개의 원소를 가지고 있었다고 대답하면 그대로 순환논법에 빠진다. 세어보는 과정(operation of counting) 없이 결정할 수 있지 않으면 안된다. '일대일 대응'이라는 개념이 이 문제를 해결해 준다. 먼저,

〈정의Ⅱ－1〉 $(a, b) = df. \{\{a\}, \{a, b\}\}$

순서쌍(a, b)를 위와 같이 집합으로 정의하면, 일대일 대응은 다시 순서쌍에 의해 정의된다.

〈정의Ⅱ－2〉 두 집합 A, B가 주어져 있고 $f = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ 일때 다음의 네 조건이 만족되면 f는 일대일 대응이라고 한다.

1) $(x)(\exists y) : x \in A. \supset. y \in B. (x, y) \in f.$

2) $(x)(\exists y) : x \in B. \supset y \in A. (x, y) \in f.$

3) $(x)(y_1)(y_2) : (x, y_1) \in f. (x, y_2) \in f. \supset. y_1 = y_2$

4) $(x_1)(x_2)(y) : (x_1, y) \in f. (x_2, y) \in f. \supset. x_1 = x_2$

위의 정의에서 집합A를 정의역, 집합B를 공변역이라고 부르기로 하자. 이제 한 집합 P가 다른 집합 Q와 같은 수의 원소를 가진다는 것은 P를 정의역, Q를 공변역으로 하는 일대일 대응이 존재한다는 것이 된다. 이때 P와 Q를 비슷하다고(P sm Q) 하자[11]

10) Quine (1940) pp. 120~121 참조.

〈정의Ⅲ－3〉 P sm Q ＝df. $(\exists f)$ (f는 P를 정의역, Q를 공변역으로 하는 일대일 대응이다.)

이제 다음과 같은 설명이 가능하게 된다. 어떤 한 집합의 수는 그것과 비슷한 모든 집합들의 집합이다. 또 수란 어떤 집합의 수이다.

지금까지의 수 개념에 대한 설명을 토대로 Peano 체계의 무정의 술어들을 정의할 수 있게 되었다. 먼저 O는 공집합의 집합이다.

〈정의Ⅱ－4〉 $\wedge = \mathrm{df.}\ \{x \mid x \neq x\}$

〈정의Ⅱ－5〉 $O. = \mathrm{df.} \{z \mid (x) : x = \wedge .\ \supset .\ x \in z\}$[12)]

어떤 수 n의 원소인 한 집합A가 있을 때, 어떤 다른 집합 B가 Sc(n)의, 즉 n의 계승수의 원소라는 것은 B에서 한 원소를 제합으로써 얻어지는 집합 B′가 A와 비슷하게 된다는 것을 말한다.

〈정의Ⅱ－6〉 $\vee = \mathrm{df.}\ \{x \mid x = x\}$

〈정의Ⅱ－7〉 $A - B = \mathrm{df.}\ \{x \mid x \in A.\ x \notin B\}$

〈정의Ⅱ－8〉 $\overline{A} = \mathrm{df.}\ \vee - A.$

〈정의Ⅱ－9〉 $\iota x = \mathrm{df.}\ \{a \mid a = x\}$

〈정의Ⅱ－10〉 $A \cap B = \mathrm{df.} \{x \mid x \in A.\ x \in B\}$

위 정의들이 Sc의 정의를 위해 필요한 개념들을 제공해 준다. 〈정의Ⅱ－9〉는 단 하나의 원소 a로 이루어진 집합을 정의하고 있다.

〈정의Ⅱ－11〉 $Sc = \mathrm{df.}\ \{(n, m) \mid (A)(B) :.\ A \in n.\ B \in m.\ \supset :.\ (y) : y \in B.\ \supset .\ B \cap \overline{\iota y}\ \mathrm{sm}\ A\}$

〈정의Ⅱ－12〉 $m = Sc(n). = \mathrm{df.}\ (n, m) \in Sc.$[13)]

이제 다음의 두 정의는 1이 두가지로 정의될 수 있음을 보여준다.

〈정의Ⅱ－13〉 $1 = \mathrm{df.}\ Sc(0)$

〈정의Ⅱ－14〉 $1 = \mathrm{df.}\ \{x \mid (\exists y) : y \in x \cdot x \cap \overline{\iota y} \in 0\}$

Nr은 모든 자연수의 집합이다. 즉 Nr＝{0, Sc(0), Sc(Sc(0))……} 또는 Nr＝{0, 1, 2, 3……}이다. 여기서 '……' 부분을 어떻게 명확히 할 것인가가 문제된다. 그것은 Peano의 체계가 공리화하고 있는 수들이 유한한 수들이기 때문이다. 무한수에 대해서는 Peano의 체계의 공리와 정리들은 전혀 들어 맞지 않는다. 예컨대 모든 자연수의 집합의 수인 α의 경우 $\alpha \pm 1 = \alpha$이다. 무한수에 대해서는 〈공리5〉도 적용되지 않는다. 따라서 〈공리5〉를 유한수를 정의하는 데 사용할 수 있다.

어떤 수 n이 속하면 Sc(n)도 속하는 집합을 유전적 집합(Her)이라고 하자. 또 0이 속

---

11) Russell (1919) pp. 14～16 참조. Frege는 "similar"를 "gleichzälig"라고 부르고 있다. Frege (1884) § 68 이하 참조.

12) Russell (1912) ＊100～＊101. Quine (1940) p. 237f 와 비교.

13) Quine(1940)은 Sc를 descriptive function을 사용해서 정의하고 있다. p. 238 D 39와 비교. 위의 〈정의Ⅱ－11〉은 관계없는 항의 언급을 피하기 위해 길어졌다.

하는 유전적 집합을 귀납적 집합(Ind)라고 하자.

〈정의 Ⅱ－15〉 Her＝df. { x|(n) : n∈ x. ⊃. Sc(n)∈x}

〈정의 Ⅱ－16〉 Ind＝df. { x|x∈Her. 0∈x}[14)]

어떤 수 n이 귀납적(inductive)이라는 것은 n이 Ind에 속하는 어떤 집합의 원소라는 것이다.

이제 한 수 n이 주어졌을 때, n이 속하는 모든 유전적 집합의 모든 원소들로 이루어진 집합을 선행수(predecessor) (계승수의 반대의 관계이다)의 관계에 대하여 n의 후승수(posterity)(*Prd(n))라고 하자. n의 후승수는 n자신과 n보다 큰 모든 수들의 집합이 된다. 또 0의 후승수는 모든 귀납적 집합의 원소로, 다시 말해서, 모든 귀납적인 수들로 구성된다.

〈정의 Ⅱ－17〉 Prd＝df{ (n,m) | (m, n)∈Sc}

〈정의 Ⅱ－18〉 *Prd(n)＝df. { x|(w) : n∈w. w∈Her. ⊃. x∈w }

Nr은 Prd 의 관계에 관한 0의 후승수이다. 즉, Nr은 모든 귀납적인 수들의 집합이다.

〈정의 Ⅱ－19〉 Nr＝df. *Prd(0).[15)]

지금까지의 정의들을 통하여 우리는 Peano 체계의 개념들을 논리학과 집합론의 개념들로부터 구성하였다. 이제 집합론의 개념들을 논리학의 개념들로부터 구성해 보자.

앞에서 우리는 집합과 성질을 동일하게 취급할 수 있음을 말한 바 있다. 성질(H)은 개체의 이름(a)과 결합되어서 문장(Ha)를 형성한다. 거꾸로 성질이란 문장에서 한 이름을 빼어냄으로서 얻어진다고 말할 수도 있다 (Frege의 술어 또는 함수개념은 이렇게 해서 얻어진다). 한 문장이 여러개의 다른 이름을 포함하고 있을 경우(Hab……) 어떤 한 이름(a)을 빼어낸 나머지 부분 전체가 성질이 된다. 이때의 성질은 이름들을 포함하고 있지만 그렇지 않은 성질들과 같은 것으로 취급할 수 있다. Russell(1910~1912)은 두개 이상의 이름을 포함하고 있는 문장에서 두개의 이름을 뺀 나머지 부분을 관계라고 설명하고 있다. 그러나 우리는 앞의 〈정의 Ⅱ－1〉에서 순서쌍(a, b)를 집합을 통하여 정의하였기 때문에 관계를 문장으로부터 직접 설명할 필요가 없다. 이제 한 문장 Ha에서 이름을 결정하지 않은 채로 둠으로써, 즉 이름 대신 변수(variable)를 넣음으로써 명제함수 Hx를 얻을 수 있다. 명제함수란, 따라서, 이름이 결정되지 않은 문장으로 생각될 수 있다. 더 정확히 말하면 명제함수는 문장이 아니다. 오히려 이름을 변수의 자리에 넣음으로써 문장이 되는 그런 것이다. 이제 다음의 정의가 집합론의 개념을 명제함수로부터 구성하게 해 준다.

〈정의 Ⅱ－20〉 a∈{ x | Hx } ＝df. Ha

〈정의 Ⅱ－21〉 A＝B. ＝df.(x)(x∈A. ≡. x∈B)

---

14) Carnap, R.(1931) in Putnam & Benacerraf op cit. pp. 37~40의 정의와 비교.

15) Quine (1940)은 Frege 의 Ancestral을 이용하여 Nr을 정의하고 있다. 이때 Nr은 Sc의 관계에 대하여 0의 Ancestral로 정의된다. §§ 39, 44 참조.

2. 공리의 연역

위의 정의들과 논리학의 법칙들을 이용해서 Peano 체계의 공리들을 증명하는 일은 어렵지 않다. 먼저 〈공리 1〉은 〈정의 II - 18, 19〉에 의해 명백히 성립한다. 즉 〈정의 II-18〉에 의해서 우리는 $n \in {}^{*}Prd(n)$임을 알 수 있으며 따라서 $0 \in {}^{*}Prd(0) = Nr$이다. 또 〈공리 2〉는 〈정의 II - 15, 18, 19〉에 의해 증명된다. 〈정의 II - 15〉에 의해서 모든 n에 대하여 n이 어떤 유전적 집합의 원소이면 Sc(n)도 그렇다. 또 〈정의 II - 19〉와 〈정의 II - 18〉은 Nr이 유전적 집합임을 보여준다. 〈공리 3〉은 $(n_1, m) \in Sc$ 이고 $(n_2, m) \in Sc$이면 $n_1 = n_2$라는 것을 말하고 있다.[16] 〈정의 II - 11〉에 의하여 $A_1 \in n_1$, $A_2 \in n_2$, $B \in m$인 세 집합 A_1, A_2, B에 대하여 B의 어떤 원소 y가 있어서 $A_1 sm\ B \cap zy$ 이고 $A_2 sm\ B$이다. 따라서 $A_1 sm\ A_2$이다. 〈공리 4〉는 〈정의 II -- 18, 19〉에서 증명된다. 〈정의 II - 18, 19〉에 의하여 $Sc(x) = 0$인 x는 Nr의 원소가 아니며, 따라서 모든 n에 대하여 $n \in Nr$이면 $Sc(n) \neq 0$이다.

III. 논리적 구성에 있어서의 문제점

III - 1. 무한의 문제

앞절에서 제시된 〈공리 3〉의 증명에는 한가지 전제가 숨어 있다. 예컨대 우주에 존재하는 개체의 총수가 10이라고 하자. 이때, $Sc(10) = 11 = \phi$이며 $Sc(11) = 12 = \phi$이다. 즉 $Sc(10) = Sc(11)$이다. 그러나 $10 \neq 11$이다. 따라서 〈공리 3〉은 성립하지 않는다.[17] 결국 〈공리 3〉은 무한히 많은 개체가 존재한다(무한 공리 : Axiom of Infinity)는 것이 전제될 때에만 증명될 수 있다. 그러나 무한공리는 성격상 논리학의 공리일 수 없다.[18]

III - 2. 논리적 역리

수학을 논리학으로부터의 논리적 구성물로 보는 견해에 결정적인 난점은 논리주의자인 Russell에 의해서 발견된 Russell의 역리(paradox)와 Cantor, Richard 등에 의해 발견된 논리적 역리들이었다. 알려진 대로 Russell의 역리는 $(x)(x \in w . \equiv . x \notin x)$에 의해서 정의되는 집합 w에 있어서 $w \in w . \equiv . w \notin w$라는 모순이 발생한다는 것이다. 이 역리들을 피하는 방법은 크게 두가지로 볼 수 있다. 첫째는 Russell의 유형론(theory of type)으로, $x \in x$나 $w \in w$ 등을 무의미한(ill-formed) 문장으로 간주하는 방식이며 다른 두가지는 Zermelo와 Von Neumann에 의해 제시된 공리론적 집합론(axiomatic set theory)에 의한 방식이다.

16) 앞의 〈정의 II - 12〉 참조.

17) Russell (1919) p. 24 참조. 또 Quine (1963) pp. 279 ~ 283 참조.

18) 그럼에도 불구하고 무한공리가 증명될 수 있다고 보는 견해도 있다. Russell (1919), Quine (1937) in Quine (1953) pp. 93 ~ 94 참조.

(1) Russell 의 유형론 [19]

"예수의 사도가 열둘이다"라는 문장은 유의미한 문장이지만 "베드로는 열두명이다" 는 그렇지 않다. 즉 어떤 집합과 그 집합의 원소는 서로 다른 유형(type)에 속한다. 이런 자연스러운 생각이 유형론의 출발점이다. 한 집합은 그 집합의 원소보다 한 단계 높은 유형에 속한다. 이렇게 해서 유형은 계열(hierachy)를 이룬다. 개체들은 유형0에 속하며, 그 개체들로 이루어진 집합은 유형 1에 속한다. 또 그 집합들의 집합은 유형 2에 속한다…….

x가 유형 n일 때 x^n이라고 쓴다면 Peano 공리체계의 〈공리 1〉은 $O^n \in Nr^{n+1}$로 표시될 것이다. 이상적인 경우 수학의 모든 문장은 x^n, y^{n+1}, z^{n-1} 등의 기호로 일관성있게 표시될 수 있을 것이다.

유형론에 따르면 $x \in x$는 무의미한 문장이 된다. 집합과 그 원소가 같은 유형일 수는 없다 (따라서 역리는 발생하지 않는다). 그뿐아니라 "$x \in y \cdot y \in z \cdot z \in x$" "$x^n \in y^{n+1}$ $z^{n-1} \in y^{n+1}$" 등도 무의미한 문장이 된다.

그러나 자연스러운 생각에서 출발한 유형론은 매우 부자연스럽고 불편한 결과에로 이르게 된다. 예컨대 〈정의 II－6〉에서 $\vee$는 x의 유형에 따라서 다른 $\vee$들로 대치되어야 한다. 즉 우리는 하나의 전체 집합을 가질 수 없다. 또 $\wedge$도 마찬가지. 결국 Boole 대수는 일반적으로 성립하지 못하고 각 유형에 따라서 부분적으로 성립하게 된다.[20] 또 $A^1 = \{x^0 y^0 z^0\}$와 $B^2 = \{x^1, y^1, z^1\}$은 같은 수 3의 원소일 수 없다. 3은 최저의 유형인 3^2로부터 3^3, 3^4…… 들로, 즉 무한히 많은 3^n들로 나뉘어져야 한다.

(2) 공리적 집합론

Zermelo 와 Von Neumann 은 명제함수 ϕx로부터 항상 집합 $\{x | \phi x\}$를 구성할 수 없도록 제한하거나, 또는 집합의 원소가 될 수 있는 자격을 제한함으로써 역리의 발생을 방지하고 있다. 이러한 제한은 집합의 구성이 주어진 공리들에 의해서만 가능하도록 함으로써 이루어진다. Zermelo 체계는, 예컨대, 무한공리(AI), 선출공리(Axiom of Choice ; AC) 등 일곱개의 공리로 이루어져 있는데 논리주의의 시도가 성공적이기 위해서는 Zermelo 나 Von Neumann 체계의 공리들을 다시 논리학으로부터 연역해낼 수 있지 않으면 안된다. Russell 은 유형론을 택하면서도 AI 나 AC가 전제되는 정리들(T)을 AI ⊃T, AC ⊃T 등으로 표시하고 있는데,[21] 이것은 AI 나 AC 등이 성격상 논리학의 공리에 포함될 수 없다는 것을 생각할 때 불가피한 것이었다.

III－3. 비술어적 정의

19) 여기에 서술되는 유형론은 엄밀하게 말해서 Russell 의 이론은 아니다. 이것은 단순유형론으로 Russell 의 유형론 보다 단순화된 것이다. 그러나 논리적 역리를 피하는 데 충분한 것으로 알려져 있다.

20) Quine (1937) 참조.

21) Russell & Whitehead (1912) PART III, Section C 참조.

지금까지 우리는 논리주의자들이 논리학의 개념들로부터, 명확한 정의를 통하여, 수학의 개념들을 구성해 가는 과정을 추적해 왔다. 수학의 개념들이 공리에 의해서 그냥 도입되어서는 안된다는 생각은 그들이 수학을 구성적인 학문으로 이해하고 있음을 잘 보여준다. 또 그들은 구성의 출발점과 방식에 대해서도 명확한 대답을 주고 있다. 즉 수학은 논리학으로부터 논리학의 법칙에 의거해서 구성되어야 한다. 논리학은 무엇이 존재한다거나 존재하지 않는다는 주장은 할 수 없다. 단지 어떤 구조를 가진 대상이 존재한다면 어떤 다른 구조를 가진 대상도 존재한다는 것 만을 말할 수 있을 뿐이다. 다시 말해서, 존재의 문제에 관한한 논리학은 정언적(categorical)인 진술을 할 수 없고, 가언적(conditional)인 진술을 할 수 있을 뿐이다. AI나 AC는 모두 존재를 주장하는 진술들이다. 따라서 Russell이 그 공리들을 논리학의 공리에 포함시키지 않고 그 공리들이 필요한 정리들(T)을 AI ⊃ T 또는 AC ⊃ T 라고 변형시킨 것은 수학이 논리학으로부터 논리적으로 구성될 수 있다는 그의 신념에 비추어 볼 때 정당한 것이었다.

그러나 구성적인 관점에서 볼 때, 논리주의자들은 또 한가지 고민을 가지고 있었다. 앞장의 〈정의Ⅱ－15, 16〉을 보자. 이 정의들은 매우 비구성적인 성격을 가지고 있다. 이 정의는 소위 Russell의 「악순환의 원리(the vicious circle principle)」[22]에 위배되는 비술어적(impredicative)정의이다. 어떤 수가 귀납적이라는 것은 그것이 0의 모든 유전적 성질을 가지고 있다는 것을 의미한다. 또 유전적 성질이란 어떤 수 n이 가지면 n+1, 즉 Sc(n)도 가지게 되는 성질이다. 그러나 귀납적이라는 것은 한 성질이며, 따라서 피정의항(definiendum)은 이미 정의항(definiens)속에 나타나고 있다.[23] 이 경우 Ind는 구성되었다기 보다는 미리 전제되고 있지 않으면 안된다. 따라서 이러한 정의는 순환적이며, 구성적인 관점에서 볼 때 그 타당성이 매우 의심스러운 정의인 것이다. Russell은 그의 유형론을 통하여 비술어적 정의를 거부하려고 했으나 그의 유형론도 또 몹시 불편한 결론으로 다다르게 되고 말았다.[24]

Ⅳ. 수학 －정신적 구성물(mental constructions)

Ⅳ－1. '구성적'이라는 개념

Brouwer는 고전 수학과 논리학을 그대로 받아들여서는 해결을 찾을 수 없다고 생각한다. 수학은 구성적 학문이다. 그런데 고전 수학자들은 수학을 전혀 잘못된 방향으로 이끌어 가고 있다. 그런 잘못되어 있는 수학을 구성적인 것으로 해석하려고 할 때 난관에 봉착하는 것은 당연한 일이다.

그렇다면 수학이 구성적이어야 한다는 원칙에 철저할 때, 고전 수학의 어떤 부분을 어

---

22) Russell, B & Whitehead, A. N. (1910) Introduction 참조.

23) 〈정의Ⅱ－15, 16〉은 유전적 또는 귀납적 성질이 집합으로 표시되어 있다.

24) 앞장 Ⅱ－3 참조.

떻게 거부하게 되는가? 또 그 대안으로서 제시될 새로운 수학은 어떻게 구성되는가? 우리는 이 두가지 문제에 대답해야 한다.

'구성적'이라는 개념을 명백히 정의한다는 것은 어려운 일이다. 하지만 구성적 진술과 비구성적 진술의 구분은 고전 수학자들에게도 분명한 것이었다. 다음의 예를 들어 보자.[25]

Fermat의 마지막 정리(F)는 다음과 같이 표현된다.

F : 2보다 큰 모든 정수 n에 대하여, 그리고 모든 양의 정수 x, y, z에 대하여 $x^n + y^n \neq z^n$이다. 이때,

(1) 만일 F가 성립하면 m=0, 그렇지 않으면 m=1이라고 하자.

위의 진술(1)은 비구성적 진술이다. F의 진위를 결정할 방법이 없기 때문에 우리는 m이 0인지 1인지 결정할 수가 없다. 하지만 고전 수학자들은 위의 진술(1)을 m의 정의로 받아들인다. 직관주의자들에게는 위 진술(1)은 m의 정의가 아니다.

증명에 있어서도 위의 구분은 성립한다. 이 구분이 적용되는 증명은 존재양화문장 $(\exists x)$ Ax와 선언 문장(p∨q)의 경우로, 문장 $(\exists x)$Ax의 증명이 구성적이라고 하는 것은 ― 편의상 변수의 범위를 자연수로 한정하자 ― 그 증명이 A(n)을 성립시키는 자연수 n을 보여주든지, 그런 자연수 n을 찾아내는 효과적인 방법을 보여준다는 것이다. 또 문장 p∨q의 증명이 구성적이라는 것은 그 증명이 p의 증명이든지 또는 q의 증명이라는 것이다. 예컨대 고전 수학에서 다음의 증명은 비구성적 증명이다.[26]

〈정리〉 x와 y는 무리수이고, z은 유리수가 되는 $x^y = z$의 해(solution)가 존재한다.

〈증명〉 $\sqrt{2}$ 무리수이다. 그리고 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$는 유리수이든지 무리수이다. 만일 그것이 유리수라면 $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$로 놓으면 $z = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$는 가정에 의해서 유리수가 된다. 반대로 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$가 무리수라면 $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{2}$로 놓으면 $z = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$로 유리수이다. 따라서 어느 경우에 든지 해는 존재한다.

이 증명은 주어진 방정식의 두 해 중에서 어느 하나는 정리의 조건을 만족한다는 것을 보여주고 있으나 과연 어느 쪽이 그 조건을 만족하는지 결정할 방법을 보여주지 못하고 있다. 따라서 구성적 증명이 아니다. 직관주의자들은 비구성적 정의나 증명은 정의도 증명도 아니라고 생각한다. 이런 점에서 그들은 구성적 원칙에 철저하다고 볼 수 있다. 직관주의가 구성주의(constructivism)라고 불리우는 것은 이 때문이다.

Ⅳ-2. 무한에 대한 구성주의의 태도

또 직관주의자들은 고전 수학자들(논리주의자들도 포함해서)이 유한한 대상에 대해서 정당한 원리들을 무한한 대상에로 확장시킴으로서 수학을 신학이나 형이상학과 같은 것으로 만들어 버렸다고 비판한다. 직관주의자들은 현실적 무한(actual infinity) 또는 완성된 것

25) Troelstra, A. S. (1969) p. 3.

26) Dummett, M. (1977) p. 10.

으로서의 무한(infinity as completed totality)을 수학에 받아들이는 것을 용납하지 않는다.[27] 무한한 구조(an infinite structure)를 파악하는 것은 그 구조를 생성하는 과정(the process of generation)을 파악하는 것이다.[28] 유한한 구조의 경우에 우리는 그 구조를 생성하는 과정과 그 구조 자체를, 즉 그 과정이 완성된 결과를 구분할 수 있다. 또 그 결과의 생성과정에 대해서 모르더라도 생성된 구조 전체가 우리에게 주어질 수 있다. 그러나 무한한 구조에 대해서 그러한 구분은 불가능하다. 무한한 구조의 경우, 생성의 결과에 대해서 우리가 알 수 있는 것은 언제나 그 구조의 유한한 일부분(some finite initial segment)일 뿐이다. 따라서 생성과정을 떠난 무한을 생각한다는 것은 불가능한 일이다. 고전 수학은 무한을 완성된 것으로 다루고 있다. 즉 무한한 과정의 결과 전체가 우리에게 제시되어 있는 것처럼 생각한다. 예컨대, 고전 수학에서 '변수의 변역이 무한한 경우에 전체의 각 원소에 대해 어떤 술어를 적용함으로써 참 또는 거짓의 명확한 진리값을 갖는 문장들을 얻을 수 있다는 가정이 주어지면, 보편양화문장은 각 예문들의 진리치의 논리곱(logical product)을 취함으로써, 또 존재양화문장은 예문들의 진리치의 논리합(logical sum)을 취함으로써 명확한 진리치를 갖게 된다고 생각한다. 이러한 생각은 무한한 대상이 전체로서 주어질 수 있다는 가정에 근거하고 있는 것이다.

직관주의의 관점에서 보면 고전 수학자들의 이런 태도는 유한한 경우를 정당하지 않게도 무한한 경우에 까지 확대한데 기인한다. 이렇게 함으로써 고전수학은 무한의 본질—항상 진행하고 있으며 구성의 과정이 결코 완결되지 않는—을 망각하고 있다. 즉 고전 수학자들은 무한을 특별히 긴 유한으로 간주하는 셈이다. 직관주의에 따르면 어떤 진술의 진리치도 또 어떤 수학적 대상도 무한한 과정의 최종적 결과로서 주어질 수 없다. 무한한 과정이란 바로 최종적 결과를 가지지 않는 과정이기 때문이다.[29]

Ⅳ — 3. 논리학의 위치

직관주의자들의 이러한 견해는 수학의 대상들이 우리들의 사고에 의존하지 않는 독립적·추상적 실체가 아니라 우리들의 사고과정을 통해서 구성되는 정신적 구성물(mental construction)이라는 주장에 의해 뒷받침된다. 직관주의자들에게 논리학이나 다른 언어체계들은 수학적 구성에 있어서 본질적인 것이 아니다. 수학이란 본질적으로 언어와는 무관한(languageless)[30] 행위이며 논리학과 같은 수학의 언어들이란 기억을 위해 도움을 준다든지 아니면 의사소통을 위한 유용한 보조수단이기는 하지만 수학에 정당성을 부여할 수 있는 것은 아니다. 오히려 논리학이야말로 정당성의 문제에 있어서 수학에 의존하고 있

---

27) 이 점에 있어서 그들은 형식주의자들과 견해를 같이하고 있다. Hilbert, D. (1925) Putnam & Benacerraf op cit. pp. 134 ~ 151 참조.

28) Dummett, M.(1977) p.56.

29) Dummett, M. (1977) § 3.1 참조

30) Brouwer (1952), in Brouwer (1975) pp. 509 ~ 510.

다.[31] 수학적 구성은 우리에게 직접적으로 주어지기 때문에 어떤 다른 근거도 요구하지 않는다. 논리학은 수학적 구성을 일반화함으로써 얻어진다. 예컨대 8로 나누어지는 정수가 가지는 성질을 A라고 하고 4에 대해서 마찬가지 성질을 B, 2에 대해서는 C라고 하자. 우리는 8a를 4×2a라고 쓸 수 있다. 이러한 수학적 구성 P에 의해서 우리는 A가 B를 함축(A⊃B)함을 알 수 있다. 그와 비슷한 구성 Q는 B⊃C 임을 보여준다. 이때 두 구성 P와 Q를 병치(juxtaposition)함으로써, 즉 P를 완료하고 그 다음 Q를 완료함으로써 우리는 A⊃C 임을 보여주는 구성 8a＝2×(2×2a)를 얻는다. 이러한 과정은 A, B, C 에 어떤 임의의 성격을 대치하더라도 타당하다. 즉 구성 P는 A⊃B를, 구성 Q는 B⊃C 임을 보여주는 경우에 P와 Q를 병치함으로써 우리는 A⊃C를 얻는다. 이렇게 논리적인 정리를 유도하는 과정은 본질적으로 수학적인 정리를 유도하는 과정과 다를 바 없다. 그 차이란 논리학이 더 일반적―"정수의 덧셈에 있어서 교환법칙이 성립한다"는 진술이 "2＋3＝3＋2"보다 더 일반적이라는 의미에서―이라는 것 뿐이다.[32] 이렇게, 수학적 구성의 일반화를 통해 얻어진 수리논리학은 수학의 근거가 아니라 수학의 일부인 셈이다.

Ⅳ－4. 배중율

직관주의에 관하여 들은바 있는 사람은 누구나 직관주의자들이 배중율을 받아들이지 않는다는 것을 알고 있다. 구성주의에 대한 지금까지의 논의를 통하여 우리는 배중율이 구성적 원칙에 위배되는 원리임을 알 수 있다. 즉 앞에서(Ⅲ－1－1), 우리는 p∨q의 증명은 p의 증명이거나 q의 증명이어야 구성적 증명으로 받아들여질 수 있다고 말한 바 있다. 따라서 p∨～p. 는 일반적으로 타당하지 않다. 모든 진술 p에 대해서 그것이 증명되거나 반증(reduce to absurdity)될 수 있는 것은 아니기 때문이다. 물론 배중율이 유한한 대상에 관하여 주장되었을 때, 우리는 유한한 과정을 거쳐서 p를 검증함으로써 모든 경우에 p이거나 ～p임을 확인할 수 있다. 그러나 무한한 대상에 관한, 배중율은 용납될 수 없다. Brouwer는 다음과 같이 논증하고 있다.[33]

자연수에 대한 어떤 성질 F가 다음의 조건을 만족한다고 하자.

1. 모든 자연수에 대하여 그 수가 성질 F를 가지는지 아니면 그 수가 F를 가질 수 없는지가 결정될 수 있다. 즉 F는 결정가능한(decidable) 성질이다.
2. 성질 F를 가지는 자연수를 찾는(calculating) 어떤 방법도 알려져 있지 않다.
3. F를 가지는 어떤 자연수가 존재한다고 가정할 경우, 모순이 발생한다고 알려지지는 않았다. (물론 이때 모순이 발생하지 않는다고 알려지지도 않았을 수도 있다.)

이 경우 우리는 성질 F를 가진 자연수가 있거나 없다고 단정하여 말할 수 없다. 따라

31) Heyting op cit. in Putnam & Benacerraf op cit. p.59 또 Brouwer (1907), in Brouwer op cit. p. 72 f. 참조.

32) Heyting op cit. in Putnam & Benacerraf op cit. p. 59.

33) Brouwer(1952), in Brouwer (1975) p. 510.

서 구성주의 수학에서는 배중율을 함부로 적용하는 것은 허용될 수 없다.

V. 새로운 수학의 가능성

V－1. 직관주의의 두 원칙

직관주의가 구성적 원칙에 철저한 결과는 다음과 같이 요약될 수 있겠다. 첫째로, 현실적 무한을 수학에서 배제함으로서 연속체(the continuum)의 논리적 근거가 사라져 버리게 되었다. 고전 수학에서는 연속체의 개념, 즉 실수의 개념의 구성은 현실적 무한의 개념에 의존하고 있는 것이다.[34] 따라서 고전적 해석학(mathematical analysis)은 불가능하게 된다. 둘째로, 배중율과 배중율에 의존하는(interdependent) 논리적 규칙들—예컨대, 이중부정의 원리($\sim\sim p \equiv p$.)[35]에 의해서 증명되는 정리들도 수학에서 제외되지 않으면 안된다.

고전수학의 중요한 부분들이 배제된 후 직관주의의 관점에서 타당한 부분들이란 매우 빈약하리라 여겨진다. 이제 우리가 할 일은 고전 수학에 대안으로서 제시되어야 할 새로운 수학, 즉 구성주의 수학이 어떻게 가능한가를 살펴보는 일이다. 무엇보다도 중요한 것은 실수의 구성이 가능하다는 것을 보여줌으로써 해석학이 성립할 수 있도록 하는 일이다.

이러한 작업이 가능하게 되는 것은 Brouwer에 의해 제시되고 모든 직관주의자들에게 받아들여진 다음의 두가지 원칙에 의해서 이다.

1. 무한히 계속되는 수열(infinitely proceeding sequence) $p_1 p_2 \cdots\cdots$ 의 형태로 수학적 실체(entities)가 주어질 수 있다. 이때 그 수열의 각 항들은 이미 구성된 수학적 실체들 중에서 다소 자유롭게 선택된다. 첫번째 항 p_1에서 주어진 선택의 자유가 그 다음의 항들에 대해서는 어떤 제한을 가하도록 될 수도 있으며, 심지어는 어느 항 P_n에 가서는 그 다음 항 P_{n+1}은 아무것도 선택될 수 없게 될 수도 있다.……
2. 이미 얻어진(구성된) 수학적 실체들이 가진다고 생각될 수 있는 성질들, 즉 수학적 species의 형태로 수학적 실체가 주어질 수 있다. 물론 한 species가 어떤 대상에 적용된다면 그것과 같다고(identical or be equal to it) 정의된 다른 대상들에도 적용될 수 있다. 이때 그 species에 적용되는 대상이 그 species의 원소(element)가 된다.[36]

이 두가지 원칙은 모두 우리에게 어떤 수학적 실체가 주어졌을 때, 그 실체들을 통해서 새로운 수학적 대상, 즉 실체를 구성하는 방식을 말하고 있다. 따라서 수학의 대상을 구성해 나갈 출발점이 되는 실체가 요청된다. 이 실체는 바로 자연수 계열로서 Brouwer 이래로 모든 직관주의자들은 자연수를 직관적으로 주어져 있는 것으로 간주한다. "자연수 계

---

34) Ⅱ－1 참조. Dedekind Cut에 의해 실수가 구성될 때, 예컨대 $\sqrt{2}$ 는 「모든 음의 유리수와 제곱이 2보다 작은 모든 양의 유리수, 그리고 0으로 이루어진 집합」으로 정의된다.

35) Brouwer (1948), in Brouwer (1975) pp. 489 ~ 494 참조.

36) Brouwer (1952), in Brouwer (1975) p. 511.

열(natural number series)이라는 관념은 모든 사고하는 생물에게 친숙한 것으로 직관주의 수학에서 근본적인 관념이 된다. 물론 자연수 계열이 절대적으로 명백하다거나 확실하다는 것이 아니다. 단지 그것을 기반으로 해서 수학을 구성하기에 충분할 만큼 명백한 관념이다." 37) 직관주의 수학에 있어서도 자연수는 0에 대해서 계승함수(successor function)을 반복해서 적용함으로써 얻어진다. 자연수의 생성과정은 끝이 없으므로 자연수는 무한하다. 그러나 물론 우리는 자연수 전체를 완성된 것으로 다룰 수는 없다.

V－2. 실수(**real number**)의 구성

자연수가 주어지면 산수가 가능하게 된다. 실제로 직관주의의 산수는 고전 수학의 그것과 별 차이가 없다. 또 정수와 유리수는 고전수학의 경우와 똑 같이 정의됨으로서 구성될 수 있다.

실수를 구성하기 위해서 직관주의자들은 무한히 진행하는 수열이 수학적 실체로 주어질 수 있다는 Brouwer의 첫번째 원칙에 의존하고 있다. 이 원칙에 의해서 우리는 각 항들이 유리수로 된 무한 수열 $\langle r_n \rangle$, $\langle s_n \rangle$등을 구성할 수 있다. 이때 실수는 유리수로 된 Cauchy 수열(sequence)의 동치 집합(equivalence class)으로 정의된다.

〈정의V－1〉 $\langle r_n \rangle$은 實數素(real number generator ; 이하 r.m.g.)이다. iff

$$(k)(\exists n)(m): |r_n - r_{m+n}| < 2^{-k}$$ 38)

두 r.m.g. $\langle r_n \rangle$과 $\langle s_n \rangle$이 동치($\langle r_n \rangle \sim \langle s_n \rangle$)임은 다음과 같이 정의된다.

〈정의V－2〉 $\langle r_n \rangle \sim \langle s_n \rangle$ iff $(k)(\exists n)(m): |r_{n+m} - s_{n+m}| < 2^{-k}$

'～'는 동치관계(equivalence relation)이다. 즉 재귀적(reflexive)이며 반사적이며, 또 추이적이다. 실수는 동치관계를 형성하고 있는 r.m.g.들의 동치 집합에 의해 정의된다. 이제 실수를 정의하기 위하여 Brouwer의 두번째 원칙을 보자. 둘째 원칙에 의하면, 이미 구성된 대상들의 성질에 해당하는 species가 수학적 대상으로 받아들여질 수 있다. 성질과 집합에 대하여 앞에서(Ⅱ－2－1) 이미 논하였거니와 직관주의의 species는 고전 수학의 집합에 해당하는 개념이다.(따라서 직관주의 수학은 내포적(intensional)이다.) 고전수학에서 처럼 어떤 성질 A가 대상 n에 적용될 때 A(n)이라고 표시하면 species는 $\{n \mid A(n)\}$으로 표시될 수 있고 k가 그 species의 원소라면 $k \in \{n \mid A(n)\}$으로 표시될 수 있다.

〈정의V－3〉 실수는 어떤 r.m.g. $\langle r_n \rangle$에 대하여 $\{\langle s_n \rangle \mid \langle r_n \rangle \sim \langle s_n \rangle\}$형태의 species 이다.[39]

실수가 구성됨으로써 직관주의 수학은 고전 수학에 못지 않은 풍부한 내용을 가지는 수학으로 전개될 수 있게 되었다. 물론 구성적 원칙에 철저함으로 해서 직관주의 수학은 고

37) Heyting, A. op cit. in Putnam & Benacerraf op cit, p. 60.

38) Troelstra (1969) p. 22. Dummett (1977) p. 37 참조.

39) Dummett, M. op cit. p. 39.

전 수학과 그 양상을 달리하고 있기는 하다.

Ⅳ. 결 론

수학적 진리의 성격에 관한 문제에 있어서 논리주의자들은 매우 명확한 대답을 제공한다. 수학이란 논리학으로부터 논리적으로 구성된다. 따라서 수학적 진리는 논리적 진리와 같은 성격을 가지고 있다.

직관주의에 있어서 구성의 출발점은 자연수 계열이고, 구성의 방식은 Brouwer의 두 원칙에 의해서 주어진다.[40] 이 두가지는, 직관주의자들에게, 직관적으로 타당한 것으로 받아들여진다. 우리에게는 그 타당성에 대해서 물을 자격이 없다. 언제나 그랬듯이 직관주의는 무너뜨릴 수 없는 요새이다. 한가지 지적해둘 것은, Ⅳ－3의 설명으로부터 직관주의에 있어서도 논리적 진리와 수학적 진리가 같은 성격을 가지고 있다고 생각될 수 있겠으나, (물론 이 경우 논리적 진리가 수학적 진리에 의존하고 있기는 하다) 그들의 직관주의 논리학이란 그들의 수학적 구성을 표현하는 데에만 타당하게 쓰일 수 있는 언어이다. 따라서 직관주의 논리학은 논리주의자들의 그것(logictics)처럼 일반적인 타당성을 갖는 것은 아니다.

한편 수학적 대상이 구성물(constructions)이라는 것으로부터 수학적 대상의 존재론적 위치에 대한 대답이 모두 주어지는 것은 아니다. 수학적 대상이 논리적 구성물이라면 그것은 논리학의 대상들처럼 추상적인 실체일 것이고, 또 정신적 구성물이라면 수학적 대상들은 정신적인 실체일 것이다. 하지만 적어도 수학에서 어떤 대상의 존재여부가 문제될 때, 우리는 그 대상이 구성될 수 있는가를 먼저 보아야한다. 그러므로 수학이 구성적이라는 주장은 존재론적으로 중요한 함축을 가지고 있다. 수학적 대상이 존재한다고 가정함으로써 존재하게 되는 그런 허구적인 대상들이 아닌 것만은 분명해진다.

논리주의자들은, 비술어적(impredicative) 정의를 피하려고 노력했을 때 수학적 대상이 이러한 성격을 인정하고 있었다. 비술어적으로 정의되는 대상은 구성되었다기 보다는 그것의 존재가 이미 전제되고 있는 것이다.[41] 따라서 그들은 유형론을 도입함으로써 비술어적 정의를 막으려 하였다. (이런 사정은 species를 수학적 실체로 받아들인 Brouwer에게도 마찬가지 였다)[42]

우리에게 남는 의문은 왜 그들이 그런 노력을 했는가 하는 것이다. 왜 수학적 대상이 가정되어서는 안되고 구성되어야만 하는가? 왜 형식주의자들처럼 일단 존재를 가정한 후에 무모순임을 증명하는 것이 불충분한가? 구성될 수 없고 가정되기만 한 대상들은 모두 허구에 불과한 것인가? 수학이란 본래 실재(reality)와는 관련없는 허구에, 게임에 불과한

---

40) Ⅴ－1 참조.

41) Ⅲ－3 참조.

42) Brouwer (1925) 참조.

것이 아닌가?

유감스럽게도 우리는 이 중요한 문제에 대해 분명한 대답을 할 수가 없다. 인간의 지식의 모범으로 또 "창조적 인간의 가장 독창적인 산물" (A.N. Whitehead)로 간주되고 있는 수학의 본성에 대해서 우리는 아무것도 확실히 알지 못하고 있다. 지금 우리가 할 수 있는 대답이란, 「수학적 대상을 구성될 수 있을 때만 인정하려는 것은 수학적 대상의 세계를 무정부 상태로 만들지 않고, 일관되게 하려는 노력에서 비롯된다」는 것이다. 즉 수학이 구성적이라는 것은 진위가 판명되어야 할 명제가 아니라 우리들의 방침(policy)인 것이다.

참 고 문 헌

○ Brouwer, L.E.J. (1907) "On the Foundations of Mathematics."
(1912) "Intuitionism and Formalism"
(1919) "Begründung der Mengenlehre Unabhängig von logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten"
(1925) "Zur Begründung der Intuitionistischen Mathematik I"
(1948) "Consciousness, Philosophy and Mathematics"
(1952) "Historical background, principles and methods of Intuitionism" 이상 Brouwer(1975)에 수록.
(1975) *Collected Works I: Philophy and Foundations of Mathematics* ed. by A. Heyting North-Holland Pub. Amsterdam.

○ Carnap, R. (1931) "The logicist foundations of mathematics" Putnam & Benacerraf (1964)에 수록

○ Dummett. M. (1977) *Elements of Intuitionism*—Clarendon Pr. Oxford

○ Frege, G. (1884) *Grundlagen der Arithemetik*. 영역 대역본 — Basil Blackwell, Oxford.

○ Gödel, K.(1944) "Russell's mathematical logic" Putnam & Benacerraf (1964)에 수록

○ Heyting, A.(1931) "The Intuitionist foundations of Mathematics"
(1956) "Disputation" 이상 Putnam & Benacerraf (1964)에 수록

○ Hilbert, D.(1925) "On the infinite" Putnam & Benacerraf (1964)에 수록

○ Körner, S.(1960) *Philosophy of Mathematics*—Harper & Row Pub. New York.

○ Putnam, H. & Benacerraf. P. (1964) *Philosophy of Mathematics—Selected Readings* Prentice-Hall New Jersey.

○ Quine, W. V. (1937) "New foundations of Mathematics" Quine (1953)에 수록
(1940) *Mathematical Logic*—Harrard Univ. Pr.
(1948) "On What there is" Quine (1953)에 수록
(1953) *From A Logical Point of View*—Harper & Row. Pub. New York. Pub. New York.

(1961) "The ways of paradox" Quine (1976)에 수록
(1963) *Set Theory and Its Logic* Part Ⅲ– Harvard Univ. Pr.
(1964) "Foundations of Mathematics" Quine (1976)에 수록
(1976) *The Ways of Paradox and Other Essays*–Harvard Univ. Pr.

○ Russell, B. (1903) *Principles of Mathematics* George Allen & Unwin, London.
(1910) *Principia Mathematica* Vol 1. with A. N. Whitehead.
(1912) *Principia Mathematica* Vol 2. with A. N. Whitehead.
(1919) *Introduction to Mathematical Philosophy*. George Allen & Unwin, London.

○ Troelstra, A. S. (1969) *Principles of Intuitionism*–Springer Verlag, Berlin.

○ Waismann, F. (1951) *Introductlon to Mathematical Thinking*–Frederick Ungar Pub. New York.

○ Wilder, R. L. (1952) *Introduction to the Foundations of Mathematics*–John Wiley & Sons Inc. New York.