괴델의 불완전성 정리:증명된 神話?[1)]

홍성기 (아주대)

【요약문】 일반적으로 엄밀한 방법을 통하여 증명되었다고 말해지는 괴델의 불완전성 정리는 일련의 전제와 배경지식이 요구된다고 하겠다. 이들 중에서 무엇보다도 중요한 것은 정리의 증명에 사용되는 메타언어상의 수학적 참에 대한 개념이다. 일단 확인할 수 있는 것은 "증명도, 반증도 되지 않지만 참인 산수문장의 존재"라는 불완전성 정리의 내용에서 괴델이 가정하고 있는 수학적 참의 개념이 구문론적인 증명개념으로부터 완전히 독립되어야 한다는 점이다. 문제는 그가 가정하고 있는 수학적 참의 개념이 도대체 무엇이어야만 하겠는가라는 점이다.

이 논문은 이 질문과 관련하여 내용적으로 3부분으로 나누어 질 수 있다:

I. 괴델의 정리의 증명에 필요한 전제들 및 표의 도움을 얻어 자세히 제시되는 증명과정의 개략도를 통해 문제의 지형도를 조감하였다.

II, III. 비트겐슈타인의 괴델비판을 중심으로, "일련의 글자꼴이 산수문장이다"라는 주장의 의미에 대한 상식적 비판 및 해석에 바탕을 둔 모형이론에 대한 대안제시를 통하여 괴델의 정리를 증명하기 위해 필요한 산수적 참에 관한 전제가 결코 "확보된 것이 아니다"라는 점을 밝혔다.

IV. 괴델의 정리에 대한 앞의 비판이 초수학적 전제에 대한 것이라면, 3번째 부분에서는 공리체계에서 생성 가능한 표현의 증명여부와 관련된 쌍조건문이 그 도입에 필수적인 괴델화가 갖는 임의성으로 인해 양쪽의 문장의 참, 거짓 여부가 서로 독립적으로 판단 가능하여야만 한다는 점에(외재적 관계!) 착안하여 궁극적으로 자기 자신의 증명여부를 판단하게 되는 한계상황에 도달할 경우(대각화와 관련된 표 참조) 그 독립성이 상실됨으로 인해 사실상 기능이 정지되어야만 한다는 점, 그럼에도 불구하고 이 한계상황을 간과할 경우(내재적 관계로 바뀜!) 항상 순환논법을 피할 수 없다는 점을 밝혔다. 비유적으로 거울이 모든 것을 비출 수 있어도 자기 스스로를 비출 수 없다는 점과 같으며, 공리체계 내 표현의 증명여부를 그 체계 내의 표현으로 판별하는 괴델의 거울 역시 스스로를 비출 수는 없다는 점을 밝혔다.

따라서 괴델문장이 산수문장에 속한다는 믿음은, 그 문장의 증명, 반증 여부도 아니고 또 그 문장의 사용에서 오는 것도 아니고, 플라톤적 수의 세계에 대한 그 어떤 직관에서 나오는 것도 아니다. 사실상 구문론적 측면을 제외하고는 그 어떤 것으로부터도 괴델문장이 산수문장이라는 근거는 없다. 그럼에도 불구하고 괴델문장을 산수문장으로 볼 경우(괴델의 정리의 증명과정이라는 마술을 통해!), 그것은 확보된 구성요소로부터 조합된 문장이 아니라 전체가 서로 분리불가능한 하나의 그림이라고 보아야한다. 이것은 비트겐슈타인이 공리를 그림이라고 본 것과 완전히 일치하는 맥락이다. 바론 그런 점에서 괴델문장은 새로운 공리로 도입된 것과 사실은 다름이 없다.

【주제어】 괴델의 정리, 초수학, 비트겐슈타인, 수학의 기초, 외재적/내재적 관계

1) 본고는 1994년에 논리학회에서 발표한 논문으로서 수정 없이 발표한다. 논지에서의 변화는 없으나 좀 더 일목요연하게 만들었으면 하는 바람과, 괴델의 정리가 갖는 문제점은 실은 개별적인 것이 아니라 좀 더 광범위한 영역에서 여러 모습을 갖고 나타난다는 점을 추가하고 싶었지만, 희망사항에만 머무르게 되었다.

> 철학 함에 있어서 우리의 과제는 어떤 특정한 표현을 사용하고 싶은 유혹을 심리학적인 관점에서 정확히 제시하는 것이다. 그러한 경우에 유혹을 느끼도록 말하고 싶은 것, 그것은 물론 철학은 아니다; 그것은 철학의 재료이다. 따라서 한 수학자가 수학적 사실의 객관성과 실재성에 대하여 말하고 싶어하는 것, 그 자체는 수학 철학이 아니라 철학이 다루어야 할 대상이다. (비트겐슈타인, 탐구 §254.)

I.

1. 공리화된 산수체계가 주어진 한 산수문장의 증명 혹은 반증 여부를 유한한 절차를 통하여 결정함에 있어서 본질적으로 갖는 한계, 즉 결정불가능한 산수문장의 존재를 괴델의 불완전성 정리는 말하고 있다. 나아가 증명도 반증도 가능하지 않은, 따라서 문제의 결정불가능한 산수문장의 진리값은 참이라는 주장을 위의 정리는 아울러 주장하고 있다.

2. 여기서 공리화된 산수체계란 우선 해석되지 않은 구문론적 체계로서 논리적, 비논리적 공리와 추론규칙을 포함하고 있는 것으로 상정할 수 있다. 바꿔 말해 단순한 기호조작체계로서 공리화된 산수체계 내에서 증명된, 즉 주어진 공리들로부터 일련의 추론규칙의 적용을 통하여 얻어진 복합기호는 그 자체로서는 물론 참, 거짓이라는 의미론적 성질을 가질 수 없다고 보인다. 따라서 우리가 이 구문론적 산수체계의 기본기호들을 산수적 대상, 연산을 지칭하는 표현으로 해석하였을 경우 문제의 체계가 과연 모든 산수적 진리를 연역해 낼 수 있는지, 아니면 이 체계에서 증명된 복합기호가 동일한 해석 하에서 참인지 여부는 초수학적 관점에서 볼 때 의미 있게 제기될 수 있는 질문이라고 간주된다. 여기서 초수학적 연구대상인 공리화된 산수체계의 언어를 해석한다는 것은 곧바로 이 산수체계의 기본기호들에게, 따라서 이 기본기호들로부터 적절한 형성규칙을 통하여 조합할 수 있는 정식들의 의미를 비로소 부여하는 것으로 파악될 수 있다. 즉 우리가 문제의 공리체계의 한 정식을 "산수문장"이라고 부른다는 사실은 곧바로 이 산수문장의 기본기호를 위와 같이 산수적 대상과 연산의 표현으로 해석하였음을 의미한다고 상정하는 것이다. 그리고 이 해석행위, 예를 들어 "0"을 자연수 零, "0′"을 자연수 1, "0″"을 자연수 2를 지칭하는 것으로, 그리고 "+"을 더하기, "•"을 곱하기 등으로 해석하는 데에는 어떠한 문제점도 결부되지 않은 듯싶다. 왜냐하면 초수학적 탐구를 행하는 수리철학자에게 자연수 0, 1, 2,... 등등이 무엇인지, 또 더하

기, 곱하기가 무엇을 의미하는 지는 명백하기 때문이다.

3. 주어진 구문론적 체계의 언어를 표준적으로 해석하는 것, 그것에 문제점이 없다고 생각되는 이유는 한편으론 공리화된 산수체계가 존재하기 이전에 우리는 이미 숫자를 다루는 법, 즉 세기, 더하기, 곱하기를 능수능란하게 행하여 왔다는 점, 따라서 이들 숫자와 연산기호의 의미가 무엇인지를, 따라서 이들이 지칭하는 개개의 자연수들과 더하기, 곱하기 등이 무엇인지 알고 있다는 점과, 다른 한편 언어란 기본적으로 임의의 모양꼴을 인위적인 규약을 통하여 대상과 관련을 맺을 때 비로소 가능하다는 의미론의 표준적 상황을 감안할 때 해석이란 의미 있는 언어를 위해서는 필수불가결한 것으로 보이기 때문이다.

4. 위의 표준해석을 1계-술어논리적 언어의 모형 이론적 의미론과 연관시키면, 우리는 산수문장의 진리조건을 "지시개체"와 "만족시킴"의 두 개념을 이용하여 정의할 수 있다. 열린 문장 "F(x)"와 개체 정항 "a"가 주어졌을 때 자유 변항 "x"를 "a"로 대치할 때 얻어지는 닫힌 문장 "Fa"가 주어진 해석 하에서 참이라는 주장은 "a"가 지시하는 개체가 열린 문장 "F(x)"를 주어진 해석 하에서 만족시킬 때, 그리고 그럴 때 한한 것으로 정의된다. 복합문장과 양화문장의 진리조건을 위해서는 잘 알려진 명제논리와 양화사의 해석이 추가되면 될 것이다. "만족시킴"의 개념을 확장시키면, 즉 무모순인 공리체계의 모든 증명가능한 문장을 만족시키는 해석, 즉 비언어적 존재로서 모형이 존재한다.

5. 구문론적 증명체계의 표준적 해석의 가능성과 한 산수문장의 모형 이론적 진리조건의 정의가능성은 공리화된 산수체계의 성질에 대한 초수학적 탐구가능성을 보장한다고 보인다. 즉 한 산수식의 참과 거짓여부는 문제의 산수체계 내에서의 증명, 반증여부와 동일시 될 필요가 없이 체계 밖에서, 즉 초언어에서 정의될 수 있기 때문이다. 그리고 우리는 한 산수문장의 참과 거짓에 대한 체계외적 정의가능성이 괴델의 불완전성 정리의 전제조건임을 물론 알고 있다. 왜냐하면, 만일 한 체계내의 복합기호를 "산수문장"이라고 부르는 것이 바로 그 체계내의 구문론적 규칙을 따라 기호를 사용하는 것을 전제한다면, 그리고 산수문장의 참과 거짓여부가 문제의 공리화된 산수체계 내에서의 증명, 반증여부와 동일시된다면 그 '체계 내에서 결정불가능하나 참인 산수문장의 존재'를 주장하는 괴델의 불완전성 정리는 분명 자기모순이기 때문이다.

6. 공리화된 산수체계의 한 정식을 “산수문장”이라고 부를 수 있는 근거에 대한, 그리고 한 산수문장의 진리조건에 대한 위의 초수학적 전제하에서 괴델의 불완전성 정리는 증명될 수 있다. 이점을 도표로 요약하면 다음과 같다:

그림1	공리체계 S에서의 표현											
g(E)	$\mathbf{E}_1(\mathbf{y})$	$\mathbf{E}_2(\mathbf{y})$	·	$\mathbf{E}_n(\mathbf{y})$	·	**H(y)**	·	**K(y)**	·	$\mathbf{E}_r(\mathbf{y})$	·	diagonal-f
1	$\mathbf{E}_1(\mathbf{1})$					**H(1)**		**K(1)**				d(1)
2		$\mathbf{E}_2(\mathbf{2})$				**H(2)**		**K(2)**				d(2)
·			·			·		·				·
n				$\mathbf{E}_n(\mathbf{n})$		**H(n)**		**K(n)**				d(n)
·					·	·		·				·
h						**H(h)**		**K(h)**				d(h)
·						·	·	·				·
k						**H(k)**		**K(k)**				d(k)
·						·		·	·			·
r						**H(r)**		**K(r)**		$\mathbf{E}_r(\mathbf{r})$		d(r)
·						·		·			·	·
P^*/R^*												P/R

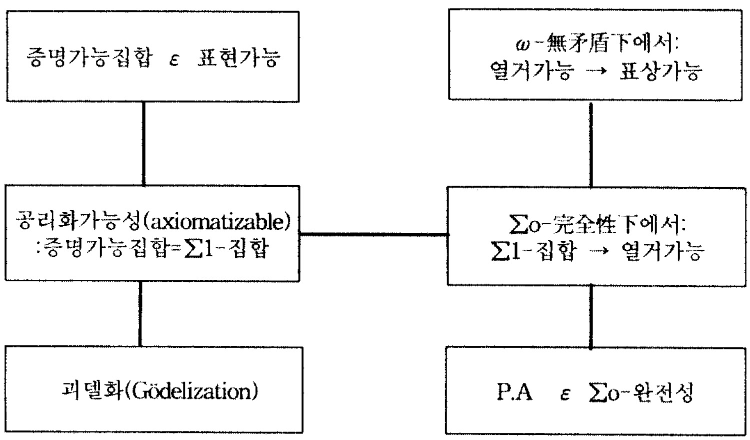
(0) 괴델화 g는 S내의 표현과 자연수를 1:1 대응시키는 함수, 즉 $n=g(\mathbf{E}_n)$
(1) $P=\{n \mid \vdash_s \mathbf{A} \wedge n=g(\mathbf{A})\}$
(2) $R=\{n \mid \vdash_s \neg \mathbf{A} \wedge n=g(\mathbf{A})\}$
(3) E_n의 대각화 = $\mathbf{E}_n(\mathbf{n})$
(4) $d(n)=g(\mathbf{E}_n[\mathbf{n}])$, $E_n[y] \leftrightharpoons \forall v_1(v_1=y \rightarrow E_n)$, $\therefore E_n[y] \leftrightarrow E_n(y)$
(5) $n \in A^* \leftrightharpoons d(n) \in A$ $(A^*=d^{-1}(A))$
(6) $n \in P^* \leftrightarrow d(n) \in P$
(7) $n \in R^* \leftrightarrow d(n) \in R$

그림2 타르스키/괴델의 불완전성 정리 증명 개념도

타르스키(Tarski)	**괴델(Gödel)**
증명 가능집합: 표현가능(Expressiblity)	증명 가능집합: 열거가능(Enumerability)
S에 대한 가정: 정확성(Correctness)	S에 대한 가정: ω-무모순(ω-Consistency)

①	$n \in \tilde{P}^* \leftrightarrow H[\mathbf{n}] \in T$	$n \in R^* \leftrightarrow \vdash H[\mathbf{n}]$
②	$H[\mathbf{h}] \leftrightarrow h \in \tilde{P}^*$	$\vdash H[\mathbf{h}] \leftrightarrow h \in R^*$
	$\leftrightarrow d(h) \in \tilde{P}$	$\leftrightarrow d(h) \in R$
		$\leftrightarrow \vdash \neg H[\mathbf{h}]$
	$\therefore H[\mathbf{h}] \in T,\ \nvdash H[\mathbf{h}],\ \nvdash \neg H[\mathbf{h}]$	$\therefore \nvdash H[\mathbf{h}],\ \nvdash \neg H[\mathbf{h}]$

③



(8) $F(v_1,...,v_n)$은 관계 $R(x_1,...,x_n)$을 S에서 표현가능하다(expressible)
  ⇔ 모든 자연수열 $k_1,...,k_n$에 대해: $R(k_1,...,k_n) \leftrightarrow F(\mathbf{k_1,...,k_n}) \in T$

(9) $F(v_1,...,v_n)$은 관계 $R(x_1,...,x_n)$을 S에서 표상가능하다(representable)
  ⇔ 모든 자연수열 $k_1,...,k_n$에 대해: $R(k_1,...,k_n) \leftrightarrow \vdash_s F(\mathbf{k_1,...,k_n})$

(10) $F(v_1,v_2)$은 집합 A를 S에서 열거가능하다(enumerable)
  ⇔ 모든 자연수 n에 대하여: $n \in A$ → 어떤 자연수 m에 대하여: $\vdash_s F(\mathbf{n,m})$,
  $n \notin A$ → 모든 자연수 m에 대하여: $\vdash_s \neg F(\mathbf{n,m})$

(11) 한 공리체계 S내에서 증명된 문장은 참이고 반증된 문장은 거짓일 때 S는 정확(correct)하다. S가 ω-모순이라 함은 $\exists xF(x)$, $\neg F(0)$, $\neg F(1)$,...이 S내에서 모

두 증명가능할 때를 말하며 그렇지 않을 경우 S는 ω-무모순하다.

(12) Σ_0-정식은 양화사가 사용되었을 경우 양화사의 상한이 제한된 정식.
Σ_1-정식은 Σ_0-정식앞에 제한되지 않은 존재양화사가 놓이고 그 이외의 양화는 제한됨.
한 공리체계가 S가 Σ_0-완전하다는 말은 참인 모든 Σ_0-정식이 S에서 증명가능할 경우.
(13) 위 그림에서 ③은 ②의 전제인 ①의 증명개략.
(14) 로써(Rosser)는 단순한 무모순성(Simple Consistency)하에서 불완전성 정리를 증명하였다.

위에서 괴델의 불완전성의 정리를 증명하는 과정의 핵심은 한 공리화된 산수체계 S에서의 증명과 증명된 문장간의 관계를 이른바 "괴델화"라고 알려진 방법을 이용하여, 즉 S내의 모든 표현 각각에 "괴델수"라고 칭해지는 특정한 자연수를 부여하는 함수를 통하여 "증명가능", 혹은 "반증가능"이라는 초언어적 술어를 S에 속하는 대상언어로 표현함에 있다. 여기에 한 개의 자유변항을 가진 열린 문장에서 그 자유변항을 열린 문장 자신의 괴델수를 지칭하는 숫자를 대입했을 때 얻어지는 닫힌 문장을 의미하는 "대각화"를 이용하여 궁극적으로 우리는 자기 자신의 증명가능성을 부정하는, 이른바 자기지시적으로 해석될 수 있는 S내의 문장을 구성할 수 있고, 바로 이 문장이 S에 대한 서로 상이한 강도의 초수학적 요구를 의미하는 정확성(correctness), ω-무모순성(ω-consistency), 무모순성(consistency)의 가정 하에서 '증명도 반증도 가능하지 않으나 참인 산수문장'임을 보여줌에 있다.(스멀리언, 1992 참조)

7. 현대의 여러 철학자들로부터 30, 40년대에 비약적으로 발전한 논리-수리 철학적 연구성과에 무지하여 괴델의 정리에 대하여 명백히 오류에 찬 언급을 하였다는 평을 받고 있는 비트겐슈타인의 관심은 그러나 위 증명과정의 기술적인 측면에 있지는 않았다.

> 나의 임무는 괴델의 정리에 대하여 이야기하는 것이 아니라, 그것을 지나치며 이야기하는 것이다.(수학의 기초, VII, §19)

> 사람들은 우리의 작업에 대하여 괴델의 증명이 얼마나 중요한지를 물을 수 있다. 왜냐하면 약간의 수학은 우리를 불안하게 만드는 이러한 종류의 문제를 해결할 수 없기 때문이다. 대답은:그런 종류의 증명이 야기시킨 상황이 우리의 관심을 끈다는 사실이다.

"이제 우리들은 무엇이라고 말해야겠는가?"- 이것이 우리의 주제이다.(수학의 기초, VII, §22)

8. 비트겐슈타인이 위의 첫 인용문에서 "괴델의 증명을 지나치며 이야기함"을 자신의 과제라고 본 것은 괴델의 불완전성 정리의 결과, 즉 "증명도 반증도 불가능하나 참인 산수문장의 존재"가 "산수문장", "산수적 참"이라는 개념에 대한 그의 견해와의 불일치, 따라서 괴델의 증명이 요구하는 초수학적 전제를 문제삼겠다는 비유임은 인용문의 전후맥락을 보아서 분명하다. 괴델의 불완전성 정리의 타당성을 믿는 사람들에게는 비트겐슈타인의 비판적 언급은 괴델의 정리의 증명과정에 대한 이해의 부족으로 간주될 것이다. 왜냐하면 바로 괴델의 불완전성 정리가 산수적 참과 증명가능여부와의 동일시를, 이른바 힐버트 계획을 포기하도록 만든 결정적 반증이라고 간주되기 때문이다. (퍼트남, 1975 참조) 해서 괴델의 불완전성 정리의 증명의 정당성과 증명의 초수학적 전제와의 관계는, 즉 후자가 전자의 전제이고 전자로부터 후자의 참도 도출되는, 따라서 닭과 달걀 중 어느 것이 먼저인가라는 우화적 논쟁과 흡사하다 보이나 실제로는 그렇지 않다. 왜냐하면 순환논법의 오류를 범하지 않기 위해서 괴델은 우선 산수적 참이 증명가능 여부로부터 독립됨을 자신의 불완전성 정리의 증명 **이전에** 보여주어야 하기 때문이다. 좀더 구체적으로 설명하면 괴델의 불완전성 정리 증명의 초수학적 전제에 대하여 이의를 제기하는 사람은, 예를 들어 "산수문장이란 무엇보다도 구문론적 규칙체계 속에서만 의미가 있으며 산수적 참은 곧바로 증명과 일치하지 않느냐?"는 반론은 괴델의 정리의 타당성을 의심하기 위하여 그 자신 적극적으로 근거 지워져야 할 필요가 없으며 단지 황당무계한 제안이 아니라는 점으로 족하다. 그러나 괴델의 입장에서는 바로 이 반론이 사실일 경우 자신의 불완전성 정리가 그 타당성을 상실한다는 점에서 이를 꼭 반박할 필요가 있다. 경우에 따라서는 바로 이 반박이 괴델의 불완전성 정리의 내용과 동일할 수도 있을 것이다.

II

9. '증명도 반증도 가능하지 않으나 참인 산수문장'의 존재, 그러나 이 주장에서 곧바로 제기될 수 있는 질문은 그 산수문장이 어떤 언어의, 즉 어떤 체계에 속하느냐는 것이다. 괴델의 불완전성의 정리의 내용을 공허하게 만들지 않기 위해서는 문제의 산수문장이 공리화된 산수체계 S에 속하여만 할 것이다. 그렇지 않다

면 산수체계 S밖의 표현이 S내에서는 증명도 반증도 가능하지 않을 수 있다는 지극히 당연한 사실에서 괴델의 불완전성 정리는 공허해지기 때문이다.

문제는 그러나 공리화된 산수체계 S에 속하는 문장이라는 뜻이 무엇이냐는 점이다. 이제 공리화된 산수체계 S의 구성을 구문론적인 관점에서 살펴보면 우선 그 기본기호와 이 기본기호들로부터 형성될 수 있는 적절한 복합기호의 정의를 의미하는 **형성규칙**과, 기호조작의 출발점이자 동시에 **변형규칙**을 의미하는 복합기호인 **공리**로 나누어 생각할 수 있을 것이다. 이때 증명이란 공리에서 출발하여 공리와 논리적 추론규칙을 반복하여 사용하여 도출할 수 있는 복합기호라고 할 수 있다. 구문론적인 관점에서 볼 때 증명도 반증도 가능하지 않으나 S에 속하는 복합기호로서 괴델문장은 S의 규칙 중 오로지 형성규칙만을 만족시켰다고 할 수 있다. 왜냐하면 한 복합기호가 변형규칙의 적용을 받았다 함은 곧 증명 혹은 반증을 의미하기 때문이다. 따라서 한 문장이 "**S에 속한다**"라는 개념은 "**S에서 증명되거나 반증가능하다**"라는 개념을 포함하지 않은 채 서로 분리되어야만 한다.

10. 그러나 S의 형성규칙은 결코 S에만 고유한 것이 아님은 우리가 서로 상이한 공리를 도입함으로써 서로 상이한 증명력을 갖고 있는 증명체계를, 혹은 서로 모순되는 공리체계를 구성할 수 있음에 비추어 볼 때 자명하다고 하겠다. 이제 서로 동일한 형성규칙을 가진, 그러나 서로 상이한 변형규칙, 즉 공리를 갖고 있는 두 증명체계 S_1과 S_2를 비교해 보자. 이때 우리는 S_2가 S_1의 확장이라고 상정함과, 즉 S_1에서 증명가능한 모든 정리들이 S_2에서 증명가능하나 그 역은 성립하지 않는다는 의미에서, 동시에 두 체계의 무모순성을 가정하면 S_1에 속하면서 증명도 반증도 되지 않는 문장이 있음을 쉽게 상상할 수 있다. 물론 우리는 형성규칙에 의해서 생성가능한 모든 문장에 대해서 증명, 반증 여부가 결정가능한 지를 질문할 수 있을 것이며 그것은 사실상 형성규칙체계와 변형규칙체계간의, 엄밀히 말해 두 구문론적 규칙체계하의 문제라고 볼 수 있다. 그러나 "결정불가능한 문장"의 존재를 증명하는 과정에는, 그리고 이 증명은 괴델의 불완전성 정리 증명의 본질적인 부분을 이루는 바, 단순히 구문론적인 개념만이 개입된 것이 아니다. 이 글 §6의 그림 2, ③에서 볼 수 있듯이 타르스키의 의미론에 근거한, 즉 증명가능한 문장의 괴델수 집합이 **표현가능하다**는 증명은 물론, 괴델의 증명에도 Σ_0-완전성이라는, 이미 산수적 참의 개념이 문제의 공리화된 증명체계 **밖에서** 전제되어 있기 때문이다. 따라서 괴델의 불완전성 정리가 본질적으로 순전히 구문론적으로, 혹은 기계적으로, 바꿔 말해 기계적으로 확실히 증명되었다고 보는 견해

는 분명 잘못이라고 단정할 수 있다.

11. 괴델의 정리의 내용에는, 그리고 그 증명과정에는 물론 "산수적 참"이라는 개념이 개입되어 있다. 이때 문장이라는 복합기호의 "산수적 의미"를 한 공리화된 증명체계에서 변형규칙에 따라 사용하는 것을, 즉 구문론적 해석을 전제한다면 괴델의 정리의 내용이 자기모순을 함축함은 이제 더 이상 언급할 여지가 없다. 비트겐슈타인은 바로 "산수적 참"을 이러한 구문론적 관점에서 해석하였다.

> "그러나 동일한 기호로 쓰여졌으며 럿셀의 체계내에서는 증명될 수 없는 참인 문장들이 없을까?" - '참인 문장들', 그것은 다른 체계내에서, 즉 다른 놀이에서 정당하게 참이라고 주장될 수 있는 문장들이다. 예를 들어 물리학의 진술들이 왜 럿셀의 기호로 쓰여져서는 안될 것인가? 이 질문은 유크리드 체계의 언어로 쓰여진, 그러나 이 체계에서는 증명가능하지 않으나 참인 명제들이 있느냐는 것과 유사하다. 게다가 실은 유크리드 체계에서 증명가능하지만 다른 체계에서는 거짓인 명제들도 있다.(수학의 기초, I, 부기3, §7)

반면에 타르스키와 괴델에 의한 불완전성 정리의 증명과정에는 공리화된 체계 S의 해석이라는 요소가 들어 있고 이 해석과정을 통하여 문제의 괴델문장이 "산수문장"이라고 칭하게 되는 것이다. 그러나 산수적 대상, 성질 그리고 관계가 -그러한 산수적 세계가 존재한다면- 일반적으로 시공을 떠나 인간의 감각적 인지의 대상이 아닌 추상적 존재로 간주된다는 점에서 대상언어의 해석이라는, 즉 언어와 대상간의 직접적인 연결을 의미하는 지시적 정의(ostensive definition)를 의미할 수 없음은 자명하다고 보인다. 또 이러한 산수적 세계에 그 어떤 종류의 수학적 직관, 혹은 일종의 정신력을 빌어 접근한다는 주장은 적어도 이 글의 필자에게는 분명히 해당되지 않을 뿐더러 곧 바로 인식론적인 관점에서 또 다른 검증할 수 없는 전제 없이는 간주관성의 결여에 대한 논의를 분명 야기시킬 것이다.

> 의심할 여지없이 1971년에는 플라톤적 수학을 갖고 생계를 유지할 수 있었다. 수학자 A가 수학자 B에게 플라톤적 관점에서 수학에 대하여 거침없이 이야기하고 후자가 이에 대해 같은 식으로 반응을 한다면 행위에 있어서 적어도 인간적 의미가 있을 것이다. 임금이 내의바람으로 돌아다닌다 해도 그의 신하들도 역시 그러하다면 그들은 서로같이 생활할 수는 있을 것이다.(데이비스, 1979, 166쪽)

실제로 대상언어의 해석은 이미 해석되었다고 간주되는 초언어를 통해서 행하여지고 있으며 그것은 산수적 세계에 대한 직접 접근이 불가능한 한 불가피한 일이

다. 그러나 산수적으로 해석되었다고 간주되는 초언어로부터 자동적으로 산수적 세계의 존재가 함축될 필요는 없는 것이다. 그것은 우리가 초언어의 산수적 표현을 사용할 수 있는 능력으로부터, 즉 그 산수적 표현의 의미를 안다는 것으로부터 산수적 표현의 지시대상을 안다는 것으로 비약될 필요는 없기 때문이다.

12. 잘 알려졌다시피 비트겐슈타인은 한 표현의 의미를 그 표현의 사용이라고 생각하였다. 그것은 한 표현의 의미를 정신적 대상으로도, 내포적 대상으로도, 또 외연적 대상으로도 파악하지 않았다는 점에서 산수적 표현의 사용으로부터 산수적 대상의 존재가정이라는 실재론적 방향과는 정반대라고 할 수 있다.

> 너는 왜 항상 수학을 발견(Finden)의 측면에서 바라보고 행함(Tun)의 측면에서는 보지 않니? (수학의 기초, VII, §5)
>
> 말의 이런 사용을 생각해 봐:나는 누구에게 "빨간 사과 다섯"이라고 쓰여진 쪽지를 주어 가게에 보낸다. 그는 "사과"라고 쓰여진 가게문을 막 열고 있는 주인에게 간 후, 색표에서 "빨강"이라는 단어 옆에 있는 색을 찾는다. 이제 그는 "하나, 둘, 셋..."등 일련의 숫자를 하나씩 말하면서 -나는 그가 이 숫자들을 외우고 있다고 가정한다- 색표에 있는 색과 같은 빛깔의 사과를 하나씩 집어넣는다. 이런 방식으로, 혹은 유사하게 사람들은 말을 사용한다. "그러나 어디에서 어떻게 '빨강'이라는 단어를 찾아보아야 할지, 또 '다섯'이라는 단어를 갖고 무엇을 할는지 그가 어떻게 알 수 있겠는가?" 나는 그가 내가 써 준 데로 **행동하리라** 상정한다. 설명들이란 언젠가는 끝이 나기 말이다. 그러나 "다섯"이라는 단어의 뜻은 무엇일까? 그런 것에 대해서는 여기서 도대체 언급도 되지 않았다. 단지 "다섯"이라는 단어가 어떻게 사용될지 그것이 중요할 뿐이다. (탐구, §1)

산수에 있어서 행함이란 물론 세기, 더하기, 곱하기 등을 말할 것이다.

13. 산수행위에 있어서 그 출발은 세기에 있을 것이다. 물건의 개수를 셀 수 없다면 더하기나 곱하기 등의 목적이 사라지기 때문이다.

> 어떻게 단순히 표현의 변환(기호의 조작, 필자 주)이 현실적 중요성을 갖을 수 있을까?
>
> 내가 25 x 25개의 호두를 갖고 있다는 것은 625개의 호두를 일일이 셈으로써 확인할 수 있다. 그러나 그것은 "25 x 25"라는 표현에 좀더 가까운 다른 방법으로도 확인할 수 있다. 그리고 곱하기의 목적이 이 두 종류의 수확정(Zahlbestimmung)의 연결에 있음은 물론이다.

물건들의 개수를 센다는 것은 그 물건의 모임에 특정한 숫자를 대응시킨다는 말이다. 이때 대응시키는 숫자를 우리는 특정한 종류의 물건에 관련시키지 않는다. 다만 대상이 "**셀 수 있다**"는 것과 그 대상이 "**개체들의 모임이다**"는 개념은 불가분의 관계에 있으며 서로간에 순환적으로만 정의 가능함을 이해할 필요가 있다. "개체와 숫자의 1대1 대응행위"이라는 표현은 개체와 숫자의 존재 모두를 전제하나 대응행위 자체는 -우리가 이 행위의 묘사언어에 이미 침투한 개체화를 경계한다면- 이들의 개체화를 꼭 전제하는 것은 아니다. 따라서 개수를 센다던가 개체의 존재에는 특정한 보는 방식(Sehweise)이, 즉 주변세계의 분할의 하나로서 개체화(Individuation)가 개입되며 "셀수 있음"과 "개체의 존재"는 말하자면 위의 보는 방식을 통하여 **동시에** 비로소 생기는 것이다. (프레게가 제시한 웨이터의 나이프와 접시간의 일대일 대응행위에서 프레게는 그러나 개체의 존재를 이미 가정하였다. 비트겐슈타인이 논고에서 바로 그러한 이유로 개수라는 개념은 오로지 순환적 정의만을 통하여 도입될 수 있으며 프레게의 오류가 바로 여기에 있다고 한 것이다. 논고, §4.1273 참조)
5개의 사과를 센다는 것은 낱낱의 사과를 "하나", "둘", "셋", "넷", "다섯"의 숫자와 1대1 대응시킴을 의미하고 이때 마지막 사과에 대응된 숫자가 바로 사과들의 전체 개수를 의미한다고 할 수 있다.

이때 어떠한 기호를 숫자로 사용하느냐는 것은 임의의 약속을 통해, 혹은 관습에 의해 결정될 수 있으나 중요한 점은 숫자의 나열에 있어서 그 순서를 고정시킴에 있다. 이때 바로 숫자의 나열도 개체의 나열이라는 점에서, 그리고 첫째 숫자에서 어떤 특정한 숫자까지의 숫자의 개수가 바로 그 특정한 숫자로 대표된다는 점에서 숫자들의 순서의 고정은 숫자와 개체간의 1대1 대응과정에서 일어날 수 있는 오류의 가능성 없이 개체들의 개수에 대한 기호적 체계의 절대적 기준제시를 의미한다.

숫자라는 기호체계의 고정, 즉 숫자들의 체계적 나열 속에서 각 숫자의 위치의 고정은 바로 각 숫자들이 오로지 이러한 숫자들의 특정한 순서 속에서만 의미를 갖는다는 점을 말한다. 해서 아라비아 숫자로서 "5"와 우리말의 "다섯", 중국어의 "五" 등등이 동일한 의미를 지녔다는 것은 그것이 같은 수를 지칭하기 때문이 아니라 바로 그 숫자들이 세기라는 산수적 행위에서의 위치가, 즉 그 사용이 동일하기 때문이다. 숫자들의 위치의 고정은 따라서 일정한 규칙을 따름을 의미한다. 따라서 "하나" 다음에 "둘"이라는 숫자가 "후속숫자"로서 등장할 때 "하나"와

"둘"의 관계는 "하나"와 "둘"이 독립적으로 도입된 후 성립되는 **외제적**(extern)인 관계가 아니라, 비트겐슈타인에 의하면 이들의 의미를 동시에 규정하는 **내재적**(intern)인 관계를 의미한다.(논고, 4.1273 참조) "하나"의 후속숫자가 "둘"이 아니라면 이때 이들의 의미는 우리말에서 숫자로 사용되는 "하나"와 "둘"의 의미와 다른 것이다.

또 우리는 두 개체모임의 개수의 합을 의미하는 더하기 역시 바로 이 고정된 숫자열 위에서 행할 수 있다. 즉 "둘 +셋 = 다섯"은 물론 두개의 사과에 세개의 사과를 합쳐서 전체를 셈으로써 확인할 수 있다. 그러나 바로 이 셈하기라는 1대1 대응 행위에 숫자열이 개입된다는 사실에서 우리는 "둘"의 후속숫자로부터 셋째 숫자를 "둘+셋"의 답으로 생각할 수 있다. 그리고 우리는 "둘", "셋" 그리고 "다섯"이라는 숫자들이 숫자열 속에서 그 위치가 규칙에 의해 고정되었다는 사실에서, 그리고 좀더 확장하여 10진법과 같은 숫자열의 무한한 생성규칙을 이용하여, 더하기, 그리고 곱하기라는 계산도 이에 상응하게 완전히 기호 내적인 규칙으로 파악할 수 있을 것이다. 즉 이들 연산은 이제 개수의 세기라는 행위를 떠나 기호 조작을 의미하는 구문론적 규칙체계로 포섭될 수 있다.

> 규칙은 규칙으로서 분리되어, 말하자면 스스로 군림하듯이 서 있다. 물론 이 규칙에 중요성을 부여하는 것은 일상적인 경험세계의 사실임에도 불구하고 말이다. (수학의 기초, VII, §3)

14. 위에 산수적 참의 구문론적 해석으로, 즉 모형이론적 해석에 대한 하나의 대안에서 중요한 점은 대상언어의 해석이 일어나는 초언어의 산수적 표현을 기호체계와 무관히 존재하는 산수적 세계와 관련시킬 필요가 없으며, 또 "지시된 개체"와 "만족시킴"이라는 의미론적 개념을 빌어 산수문장의 진리조건을 정의할 필요도 없다는 점이다. 그렇다고 하여 산수문장이 순전히 임의적인, 이른바 해석되지 않은 기호의 조작일 필요도 없다. 산수문장이 현실과 관련을 맺는 것은 산수적 세계를 그 지시대상으로 삼는 해석을 통해서가 아니라 바로 산수적 표현과 현실 세계의 개체들을 대응시키는 '개수의 세기'라는 기초적 행위에 근거한다고 볼 수 있다. 즉 숫자는 어떠한 산수적 대상도 지칭할 필요가 없다. 그것은 마치 "원인" 혹은 "결과"라는 표현을 특정한 사건을 지칭하는 고유명사로 간주하는 오류와 흡사하다. 이 두 개념은 자연적 세계의 인과적 **구조**를 들어내는 데에 사용하는 것이지 특정한 사건들을 지시하지는 않는다. 마찬가지로 숫자를 통해 우리는 개체

화된, 즉 셀 수 있는 세계의 산수적 **구조**를 들어내지 초감각적 세계에 존재하는 개체를 지칭하는 것이 아니다.

> 한 수학적 문장을 아는 사람은 아직 아무것도 알고 있지 않아야 한다. 만일 우리의 연산과정에 혼란이 있다면, 즉 누구나 자기 멋대로, 그리고 한번은 이렇게, 한번은 저렇게 계산한다면, 아직 계산이란 존재하지 않는 것이다. 만일 우리가 서로 일치한다면 아직 우리는 우리의 시계를 맞추었을 뿐 아직 시간은 측정하지 않았다. 한 수학적 문장을 아는 사람은 아직 아무것도 알고 있지 않다. 바꿔 말해 한 수학적 문장은 현실묘사의 뼈대만을 제공할 수 있을 뿐이다. (수학의 기초, VII, §2)

> "만약 계산이 현실적인 의미를 지니려면 그것은 사실을 밝힐 수 있어야 한다. 그리고 이 일은 오로지 실험만이 할 수 있다." 그러나 어떤 것이 '사실'인가? 너는 손가락으로 가리켜 어떤 사실을 의미하는지 보여줄 수 있다고 믿니? 한 사실의 '확인'이라는 표현이 어떤 역할을 하는 것인지 분명히 알고 있어? -만일 수학이 네가 '사실'이라고 부르는 것의 **특징**(Charakter)을 비로소 규정짓는다면! "이 音이 얼마나 많은 진동을 갖는지 안다는 것은 흥미롭다" 그러나 산수가 너에게 바로 이 질문을 할 수 있는 능력을 가르쳐 준 것이다. 산수가 바로 너에게 이러한 종류의 사실을 볼 수 있도록 가르쳐 주었어.

> 수학은 -나는 이렇게 말하고 싶다- 너에게 단순히 한 질문에 답하는 법을 가르쳐 준 것이 아니라 질문과 대답을 둘 다 포함하는 말놀이를 통째로 가르쳐 준 것이다. (수학의 기초, VII, §18)

15. "증명도 반증도 불가능하나 참인 산수문장", 도대체 왜 이 문장이 산수문장이라는 것인가? 대답은 우리가 이 문장이 포함하는 기호들을 산수적 대상과 연관시키는 해석을 하였기 때문이라는 것이다. 그러나 "이 문장이 포함하는 기호들을 산수적 대상과 연관시키는 해석을 하였다"라고 말하는 것은 그 문장이 바로 산수문장이라는 것 이상도 이하도 아니다. 또 이 문장이 포함하는 한 표현을 수를 지칭하는 숫자로 보아야 할 이유가 무엇인가라는 질문에 유사한 대답을 하였을 때에도 마찬가지이다. 예를 들어 그 표현을 "0'''''"이라고 상정해 보자. 이제 해석을 통하여 표현 "0'''''"을 자연수 5를 지칭하는 숫자라고 하면 우리는 "0'''''"이 포함된 더하기, 곱하기 등을 할 수 있을 것이다. 그리고 이때 그 계산이 옳다면 물론 그 표현이 산수적 표현, 즉 자연수 5를 지칭하는 숫자라고, 일종의 **말하는 방식**으로서 받아들일 수도 있다. 그러나 그것은 바로 그러한 계산을 할 때, 즉 규칙을 따르는 행위를 할 때 사용된 표현 "0'''''"이 그렇다는 것이지 문제의 괴델문장 내에서 시각적으로 동일한 표현 "0'''''"이 곧바로 산수적 표현이라는 것을 의미하는 것이 아니다. "8205134"은 자연수 **팔십이만오천백삼십사**를 지칭하는

표현인가, 아니면 한 논리학 교수의 연구실의 전화번호인가? 혹은 전화번호란 한 전화기에 부여한 자연수라고 보아야 하는가? 이제 전화기의 숫자판이 "가, 나, 다,..."으로 쓰여져 있다고 생각해 보자. 그러면 전화번호란 그 어떤 산수적 대상을 지칭하는 것이 아니라 여기서 단지 행위지침일 뿐임이 분명해진다. 따라서 위의 질문이 도대체 잘못 제기되었음을 이해하는 것은 중요하다.

16. 괴델문장의 표현들이 산수적 대상을 지칭하는지 여부는 그 표현들이 어떻게 **사용**되었는지를 살펴보아야 한다. 예를 들어 한 표현을 특정한 자연수를 지칭하는 것으로 해석하였다고 말하는 것은 우선 그 표현을 **어떠어떠하게** 사용하겠다는 事前의 선언적 의미만을 지닐 뿐이다. 그것은 한 제화점이 발행하는 상품권이지 현금을 의미하는 것이 아니며 그 금액에 해당하는 실제 구두는 더더욱 아니다. 이때 "어떠어떠하게"라는 어귀를 그러나 다음과 같이 이해하면 어떨까? 문제의 표현은 그가 지칭하는 수가 산수적 세계에서 갖고 있는 속성이나 관계를 진술하는 문장에 등장하면 그 문장을 "옳은" 문장이라고 부르며, 그렇지 않으면 "그른" 문장이라고 부른다는 것이다. 문제는 그러나 어떻게 괴델문장들의 참과 거짓을 알 수 있는 가라는 점이다. 괴델의 불완전성의 정리의 증명을 통해? 물론 아니다. 왜냐하면 이 정리의 초수학적 **전제**에 대하여 우리는 질문하고 있기 때문이다. 아니면 실제로 그 자연수가 그러그러한 속성이나 관계를 지니고 있기(있지 않기) 때문에? 이 대답은 물론 산수적으로 해석된 문제의 문장이 참(거짓)이라고 말하는 것 이상도 이하도 아니다. 개체정항과 개체와의 직접적인 지시관계의 설정이 불가능한, 그리고 개체에 대한 직접적 서술(predication)이, 즉 "만족관계"의 직접적 판단이 불가능한 상황 하에서 한 문장의 진리값을 모형 이론적 해석개념을 동원하여 정의하는 것은 항상 동어반복에 빠질 수밖에 없다.

> 우리가 "참"이라는 표현에서 무엇을 이해하고 있는 지를 정의를 통해 분명히 하려는 시도는 공허할 수 밖에 없다. "우리의 표상(Vorstellung)이 현실과 일치한다면 그 표상은 참이다"라고 말함으로써는 아무것도 새로이 얻어진 바가 없다. 왜냐하면 이 정의를 적용하기 위하여 구체적인 경우에 그 표상이 현실과 일치하는 지를, 바꿔 말해 그 표상이 현실과 일치한다는 것인 참인지를 **결정하여야**(필자 강조) 하기 때문이다. 즉 피정의항 자체가 전제되어야 한다. 같은 문제점이 다음과 같은 종류의 모든 설명에서 발생한다: "만일 A가 이러이러한 속성을, 혹은 저러저러한 관계에 서 있으면, A는 참이다." 구체적인 경우에 항상 문제되는 것은 A가 이러이러한, 혹은 저러저러한 관계에 서 있다는 것이 참인지에 달려 있기 때문이다.(프레게, 1897, 139쪽 이후)

17. 만일 위의 "어떠어떠하게"라는 표현을 대상언어의 해석이 일어나는 초언어에서의 산수적 표현의 사용과 동일시한다면, 그리고 이때 산수적 표현의 사용이란 바로 기호체계내적 조작, 즉 구문론적 조작을 벗어날 필요도 또 벗어날 수도 없다고 가정한다면, 그리고 문제의 공리화된 산수체계가, 예를 들어 페아노 산수체계가 바로 초언어의 기호조작규칙을 그대로 반영하고 있다고 가정한다면, 즉 십진법을 이용한 더하기, 곱하기의 규칙체계를 작대기 산수체계나 후속수 함수기호를 사용한 공리체계로 번역한 경우라면 괴델의 불완전성 정리는 그 타당성을 잃을 수밖에 없다. 바로 이러한 관점에서 쿠체라(Kutschera)는 타르스키류의 해석개념이 전제하는 모형개념을 비판하면서 괴델의 정리가 순환논법에 빠졌다고 주장하였다.

> 타르스키는 볼자노와 프레게의 생각을 바탕으로 철학사상 처음으로 의미론적 개념들을 구문론적 개념들과 같은 정도의 정밀성을 갖고 다룰 수 있는 가능성을 열었다. 그의 의미론의 기본개념은 바로 해석에 있다. (...) 해석이란 그에 따르면 언어적 표현들로부터 대상들에게로의 일련의 함수라고 할 수 있다. (...) 그러나 이때 이 대상들을 언어적 표현에 맺어 줌에 가장 넓은 의미에서 조차도 그것이 구성될 수 있어야 한다는 점은 요구되지 않았다. 차라리 이런 착상은 플라톤적 관점에서 출발하며, 이에 따르면 위의 맺어 줌이란 추상적 존재로서 그 어떤 이상적인 세계에 존재하며 인간의 지적능력이 탐구하도록 주어졌다는 것이다. 해석이란 바로 대상들로부터 언어적 표현으로의 이러한 종류의 맺어 줌을 의미하며 그것은 효과적으로 구성될 필요가 없다.
>
> 그러나 언어는 의사소통의 수단으로 사용될 수 있어야 하기 때문에, 개개인이 자기혼자 사적으로 한 언어적 표현에 의미를 부여하는 것으로는 충분하지 못하다. 의미부여는 차라리 그 언어를 사용하려는 모든 사람들에게로의 접근과 이해가 가능하여야 한다. 바꿔 말해 언어는 초언어를 통해 요구되는 의미부여가 실제로 구성가능하도록 규약을 통해 고정되어야 한다. 이때 규약은 충분히 넓은 의미에서 구성적이어야 할 것이다. (쿠체라, 1964, 42-43쪽)

18. 그러나 만일 초언어의 산수적 문장이 꼭 구문론적 규칙체계를 통하여만 그 진리값이 결정될 필요가 있는가? 만일 직접 접근이 불가능한 산수적 세계와 초언어내의 산수적 표현의 모형이론적 해석이라는 개념을 다시 한번 동원하지 않는다면 도대체 그 방법이 무엇인가?

만일 초언어에서는 무한한 증명과정을 이용하고 대상언어체계에서는 유한한 증명과정을 인정한다면 그것은 서로 다른 두 규칙체계의 비교문제일 뿐이며 그것은

이미 구문론적 관점에서 살펴본 바와 같다.

만일 증명이나 반증에 아직 성공은 하지 않았지만 참이라고 추측되는, 이른바 "수학적 추측"이라 알려진 경우를 그 예로 든다 하여도 괴델의 불완전성 정리는 단순히 '증명방법 이외에 **참이라고 추측할 수 있는 방법**'을 요구하는 것이 아니라 '증명방법을 떠나서 **참이라고 단정할 수 있는 방법**'을 전제로 요구한다는 점에서 문제의 해답이 될 수는 없다.

그렇다면 증명과정을 거치지 않은 채 참이라고 단정할 수 있는 산수문장을 나는 갖고 있는가? 물론 해석된 공리체계에서 공리들이 이에 해당할 것이다. 그러나 괴델문장은 명백히 공리에 속하지 않는다.

이제 만일 내가 증명도 반증도 불가능하나 한 산수문장의 진리값을 알 수 있는 방법을 갖고 있다면..., 그러면 괴델의 불완전성 정리의 증명은 새삼스럽게 무슨 필요가 있는가?

III

19. 그러나 산수적 참이 규칙을 따름에 있는 것이 아니라, 바꿔 말해 더하기나 곱하기의 결과에 대하여 사람들의 인정여부가 일치하지 않는다면, 예를 들어 산수적 참을 실험을 통해 결정한다면, 즉 경험적으로 확인한다면 무슨 문제가 있을까?

> 그러나 우리는 그 규칙을(12인치=1피트) 자들은 그렇고 그렇게 만들어졌고 사람들은 이들을 **그렇게** 사용한다는 경험문장으로 대치할 수는 없을까? 예를 들어 인간이 만들은 이 제도에 대한 인류학적인 진술로서 말이다.
>
> 이제 이러한 진술이 규칙의 기능을 넘겨받을 수 있음은 분명하다.(수학의 기초, VII, §2)

더군다나 우리는 계산행위를 보는 관점에 따라 실험으로 간주할 수도 있다.

> "실험"은 단지 어떤 특정한 관점에서 볼 때의 행위이다. 이제 계산행위도 실험일 수 있음은 명백하다. 예를 들어 나는 이 사람이 이러이러한 상황 하에서 이 계산문제를 어떻게 계산하는 지 검사할 수 있다. -그러나 네가 알고자 하는 것이 52x63이 얼마인지라면 네가 질문하는 것이 바로 그것 아니야! 같은 내용의 질문을 내가 할 지도 모르고 더욱이 내 질문이 바로 이 단어들을 통해 표현될 지도 모르지. (다음과 비교해 볼 것: "들어봐, 그가 신음한다!", 이 문장은 그의 행동거지에 대한 것인가 아니면 그의 고통에 대한 것인가?) 그러나 만일 내가 혹시 그의 계산 결과를 검토해 본다면? -"그러면 나는 모든 정상적인 사람들이 그렇게 반응하는 지를 분명히 확인하기 위하여 또 하나의 실험을 하는 거지."- 이제 만일 사람들이 똑같이 반응하지 않는다면-: 어떤 것이 수학적 결과이냐?(수학의 기초, VII, §17)

비트겐슈타인의 견해에 따르면 계산행위를 관점에 따라서 물리적, 심리적, 생리학적 조건 하에서 주어진 한 계산문제에 대한 반응으로, 즉 물리적 법칙에 따라 작동하는 전자계산기의 액정판에 나타나는 계산결과처럼 인간의 계산행위도 그렇게 보려면 볼 수 있다 하더라도 바로 위 인용문의 마지막 질문에 대한 대답이 불가능하기 때문에 계산행위는 경험법칙을 따른다고 할 수 없는 것이다.

> 만일 계산이 실험이라면, 그리고 그 **조건들이 만족됐다면**, 그러면 우리는 무엇이 결과로 나타나든지 그것을 인정하여야만 할 것이다. 또 만일 계산이 실험이라면 "계산결과가 이러이러하다"는 문장을 "그러한 상황 하에서는 이러한 종류의 글자가 생성된다"는 것을 의미할 것이다. 따라서 이런 조건들 하에서 한번은 이런 결과, 한번은 저런 결과가 나온다 해도, 사람들은 "무엇인가 맞지 않아" 혹은 "두 계산이 제대로 되지 않았어"라고 말해서는 안되며, "이 계산은 항상 같은 결과가 나오지 않는다"라고 말해야 될 것이다(**왜** 그런지는 꼭 알려질 필요가 없다). 어쩌면 이런 행위는 똑같이 흥미로울 수도, 아마도 더욱더 흥미로와 질 수도 있다. 그러나 그렇다면 계산은 더 이상 존재하지 않는다. 그리고 이점은 다시 한번 "계산"이라는 단어의 사용에 대한 문법적 언급(grammatische Bemerkung)이라고 할 수 있다. 물론 이 문법은 딱 찌르는 점이 있다. (수학의 기초, VII, §9)

바꿔 말해 계산이 실험일 수 없는 이유는 오류의 가능성에 있기 때문이다. 그러나 자연의 경험적 사실을 오류라고 할 수 없듯이 만일 계산이 실험이라면 오류의 가능성을 배제할 수밖에 없기 때문이다. 그리고 이러한 반론은 그 어떤 수학적 참의 형이상학적 근거에 있는 것이 아니라 바로 우리가 "계산"이라는 표현을 사용하는 언어의 문법에 근거한다는 점이다. 바꿔 말해 우리는 "계산"이라는 말놀이는 경험적 사실의 발견과는 다르다는 점이다.

> "그렇다 해도 인간들이 그렇게 계산한다는 것은 경험적 사실이다!" -물론, 그러나 그렇

다고 해서 산수문장이 경험문장이 되는 것은 아니다.

"그러나 우리의 계산은 그럼에도 불구하고 경험적 사실에 근거하고 있어!" 물론, 그러나 어떤 사실을 너는 지금 생각하고 있니? 계산을 가능하게 하는, 혹은 계산을 유익한 행위로 만드는 심리적이고 생리적인 사실들? 생리적인 사실들과의 연관은 계산이 말하자면 거의 항상 그렇게 진행되는 실험이라는 모습을 띄운다는 점에 있다. 심리적인 사실들로부터 계산은 자신이 노리는 바(Pointe)를, 자신의 표정(Physiognomie)을 받아 온다: 그러나 그것이 곧바로 수학적 명제들이 경험적 명제의 기능을 갖고 있다는 것은 결코 아니다. (그것은 마치 어느 누구인가 단지 배우들만이 극에 출연하기 때문에 무대위에서 다른 사람들은 적절하게 쓰여질 수 없다고 믿는 것과 거의 흡사하다.)

계산에는 인과적 연관관계가 없으며 단지 그림의 연관관계가 있을 뿐이다. 그것은 우리가 계산 결과를 인정하기 위하여 증명과정을 검토한다고 해서 달라지는 것이 아니다. 계산을 심리적 실험을 통해 생성시킨다고 말하고 싶은 유혹은 그래 있다. 그러나 정신적 과정이 계산에 있어서는 심리적으로 조사되지 않는다.(수학의 기초, VII, §18)

계산을 심리적, 생리적 실험과 동일시하는 오류를 비트겐슈타인은 "배우--무대-스텝"의 비유를 통해 암시하고 있다. 그것은 계산과정을 단지 개인적인 일로 간주하기 때문에 일어나는 오류라는 것이다. 즉 그 오류는 **내가** 한 계산문제를 풀 때 **오로지 나의 몸과 정신만**이 개입되니까 계산행위자체도 심리적, 생리적으로만 제약받는다고 보는 좁혀진 시야에 있으며 계산은 그러나 특정한 종류의 말놀이로서 이에 상응하는 사회적인 제약을 받는다는 점을 망각했다는 것이다.

우리는 "증명은 그림이다"라고 한다. 그러나 이 그림은 검토 후에 내리는 인정을 요구한다.

물론 그것은 사실이다. 그러나 한 사람으로부터는 인정을 받고 다른 사람으로부터는 인정을 받지 못한다면, 그리고 이들이 서로 견해를 조정할 수 없다면 계산이라는 것이 과연 있을까? 해서 인정 자체만이 계산을 가능하게 하는 것이 아니라 인정의 일치가 필요하다. (수학의 기초, VII, §9)

20. 계산행위란 따라서 본질적으로 규칙을 따르는 행위이며 그것은 경험적 사실에 근거를 두고 있지 않다. 해서 공리화된 대상언어의 표현을 초언어를 통하여 산수적으로 해석할 때, 이 초언어적 산수문장의 참은 바로 규칙체계에 근거한다고 볼 수 있다. 그리고 본인은 산수적 규칙체계가 적절한 공리체계를 통하여 공리화 될 수 있다고 생각한다. 바꿔 말해 페아노 산수체계는 이 초언어의 산수적

규칙체계를 공리화하였다는 것이다. 따라서 형이상학적 문제가 딸린 모형 이론적 해석을 초언어내의 구문론적 해석으로 대치한다면 물론 괴델의 정리의 증명의 초수학적 전제조건은 더 이상 만족될 수 없다고 하겠다.

21. 그러나 흥미로운 점은 산수적 참을 경험적으로 간주한다 하여도 괴델의 정리의 증명은 불가능하다는 사실이다. 그 이유는 공리체계 내에서의 증명과 증명된 문장간의 관계를 이른바 괴델화를 통하여 산수화한다는 것은 일종의 거울을, 괴델의 정리의 증명의 경우에는 심지어 자기 자신을 비출 수 있는 **산수적 거울**을 고안하는 것에 비유될 수 있기 때문이다. 이때 증명의 괴델수와 증명된 문장의 괴델수간의 관계를 산수적 관계로 파악함에 있어서 이 관계가 산수문장의 경험성으로 인해 고정된 진리값을 가질 수 없다면 그 산수적 거울은 사물을 있는 그대로 비추어 줄 수 없고 따라서 거울의 기능을 상실하기 때문이다. (예를 들어 거울의 표면이 유동의 액체라고 상정 해보면 이 비유의 의미를 쉽게 이해할 수가 있을 것이다.) 따라서 계산행위를 경험적으로 파악하든 아니면 규칙의 따름으로 파악하든 괴델의 정리의 증명은 그 전제조건을 상실할 수밖에 없다.

IV.

22. 우리는 지금까지 괴델의 불완전성 정리의 증명에 필요한 초수학적 전제에 대하여 비트겐슈타인의 성찰을 기반으로 그 문제점을 살펴보았다. 그것은 그의 표현처럼 괴델의 정리를 '밖에서' 비판하는 것에 비유될 수 있다. 실제로 비트겐슈타인은 그가 생각하는 산수의 본질이 옳다면 괴델의 정리에 대한 그의 생각의 타당성 역시 **따라서** 밝혀지리라고 믿은 듯하다. 물론 이때 그가 괴델의 정리에 대하여 궁극적으로 내린 결론이 무엇인지는 의심의 여지없이 밝혀진 것은 아니다. 그러나 괴델의 정리에 대한 일반적 견해에 그가 만족하지 않았다는 점은 그의 비판적 언급이 도대체 존재한다는 점에서 물론 납득이 가는 일이다. 다른 한편 그가 단순히 괴델의 정리 자체를 부정했느냐는 점은 별개의 문제라는 생각이 든다.

> 사람들이 증명되지 않은 산수문장을, 심지어는 거짓인 문장도 사용할 수 있으리라는 점은 명백하다. 그때 그 산수문장은 나에게 말하기를: 그렇게 행동해!(수학의 기초, VII, §72)

그러나 이 글은 괴델의 정리에 대한 비트겐슈타인의 견해를 해석하는 데에 주안점이 있는 것이 아니라 이 정리 자체의 타당성을 살펴보자는 것이다. 그러나 지금까지 이 글을 읽은 사람 대부분은 괴델의 정리의 타당성에 **계속** 신뢰감을 주리라 본다. 그 이유는 괴델의 정리에 대한 '밖으로부터의 공격'이야 어떻든, 특히 그것이 타르스키류의 모형 이론적 의미론에 대한 도전을 전제한다고 느껴질 때 -비록 이런 느낌은 정확한 것은 아니지만(이 글 §8의 끝부분 참조)- 괴델의 정리의 증명과정의 내적 견고성에 신뢰감을 주기 때문일 것이다. 비유하면 닫힌 성문 밖에서 외쳐도 성안은 조용할 뿐이다.

23. 그러면 괴델의 정리의 증명과정 어느 부분에 특히 신뢰가 가는 것일까? 대답은 물론 "모든 부분!"일 것이다. 그러나 좀더 단계적으로 그리고 체계적으로 생각해 본다면, 문제의 출발점이 증명도 반증도 불가능하나 참인 산수문장의 존재에 있고, 이 문장의 존재 증명의 시발점은 괴델화와 한 산수체계의 공리화 가능성, 즉 증명 가능한 문장들의 괴델수 집합이 회기적이라는 점, 스멀리언(1992)의 제시에 따르자면 $\sum_1$-집합이라는 데에 있다. 이 글 §6의 증명개략도를 살펴보면,

(1) 공리체계 S의 공리화가능성, 즉 P가 $\sum_1$-집합이다.
(2) 대각화 가능성
(3) 공리체계의 $\sum_0$-완전성
(4) 대각화된 증명가능, 혹은 반증가능한 문장의 괴델수 집합 P^*, R^*의 **제한 없는** 열거가능성
(5) R^*를 열거하는 H[x]로부터 자기 지시적으로 해석할 수 있는 산수문장 "H[**h**]"의 구성가능성.

여기서 우리는 (2), (3)의 증명과정의 타당성을 (1)과 독립하여 인정하고, (4)는 (1), (2), (3)으로부터 또 증명가능하다고 할 수 있다. (5)는 만일 (4)가 타당하다면 역시 인정할 수 있다. 그러나 괴델의 정리의 증명에 있어서 필요한 초수학적 전제를 검토하면서 우리는 "H[h]"가 산수문장이라고 볼 근거를 비판하였다. 만일 앞의 비판적 논의가 타당하다면 (5)는 부정되어야 하며 후건부정논법에 의해 (4) 역시 부정되어야 한다. 왜냐하면 집합 R^*의 제한 없는 열거가능성은 부정되어야 하기 때문이다. 그러나 (4)는 (1), (2), (3)으로부터 증명되나 (2), (3)의 타당성을 인정하였음으로 문제는 결국 (1)의 타당성여부로 귀착된다 하겠다. 그리고 실제

로 괴델의 정리의 증명과정의 핵심은, 즉 초언어적 진술을 대상언어체계 내로 사상할 수 있는 가능성은 (1)에 있다고 하겠다. 해서 성박으로부터의 공격이 타당하다면 성안에도 문제가 있어야 하며 그곳은 (1)이외에는 찾을 수 없다고 보인다.

24. 이제 괴델화에 근거하여 S의 공리화 가능성을 보여주는 절차를 살펴보자. 우선 우리는 공리체계 S의 표현들에 괴델수, 즉 자연수를 배정하는 규칙을 도입한다. 이때 간과해서는 안될 두 측면이 있다. 그것은 첫째로 자연수의 **직접배정**이란 현실적으로 불가능하다는 점이다. 즉 우리는 해석되었다고 가정하는 초언어에서 사용되는 **숫자**(numeral)를 사용함으로써 **간접적으로 배정**한다는 점이다. 둘째, 괴델화 자체는 **임의적**이라는, 즉 임의성을 띈 규칙의 도입을 의미한다는 사실이다. 이제 스멀리언에 의해 제시된 괴델화 과정을 예로 이 점을 좀더 자세히 살펴보자(스멀리언, 1992 20-36쪽). 공리화된 산수체계 S의 표현들에 괴델수를 배정하는 과정은 두개의 절차로 이루어진다. 우선 S의 기본기호에 적당한 숫자를 배정한다. 이때 이 숫자는 S에 대한 언급이 일어나는 초언어가 사용하는 숫자체계, 예를 들어 우리는 그것을 b진법이라고 가정하고 동시에 이 숫자가 자연수를 지칭한다는, 즉 산수적으로 해석된 기호라고 간주한다. 둘째 S의 기본기호들로부터 구성된 복합기호의 괴델수를 산출하는 규칙을 도입한다. 스멀리언이 콰인의 방식을 따라 도입한 규칙은 괴델수가 x와 y인 표현들 "E_x", "E_y"의 병치(concatenation)로 이루어진 표현 "E_xE_y"의 괴델수를 b진법에서 "x"과 "y"의 병치 "xy"가 지칭하는 수를 함수값으로 갖는 $x*_by$으로 정한다. (시각적인 의미에서, 그리고 기호체계 내적인 의미만을 갖는 숫자의 병치가 비감각적, 기호체계 외적인 대상으로서 수의 병치와 연관되어야만 하는 이유는 궁극적으로 공리체계 S내에서의 표현들간의 관계를- 그것은 넓은 의미에서 시공상에 존재한다- 시공을 초월한 산수적 관계로 번역하기 위함에 있다.)

$x*_by$의 값 z를 산출하는 과정은 **b진법의 숫자 "xy"가 지칭하는 자연수를 계산하는 잘 알려진 방식**을 사용하며 우리는 관계 $x*_by= z$를 지수함수를 포함하는 초언어의 산수체계내에서, 그리고 그것이 궁극적으로 공리체계 S의 기본기호로 번역되어 표현될 수 있고 바로 그런 이유에서 "산수적"이라고 칭해진다. 이때 중요한 점은 병치함수의 값을 산출하는 과정에 초언어에서 표현될 수 있는 산수적 지식이 개입된다는 사실이며 이 산수적 지식의 동원은 괴델화 자체와는 완전히 무관하다는 점이다. 즉 복합기호의 괴델수는 임의로 주어진 괴델화 규칙과 그러

나 임의가 아닌, 괴델화와는 독립된 산수적 규칙의 전제 하에서만 주어질 수 있다. 따라서 x, y, z에 구체적인 괴델수가 주어졌을 때 이들간에 위의 산수적 관계가 성립하는지 안하는지는 괴델화와는 전혀 무관하며 그것은 산수 고유의 영역에 속한다고 할 수 있다.

이때 관계의 성립여부, 즉 산수적 참이 어떻게 결정되어야 하는지에 대해서는 일단 더 이상의 논쟁을 벌일 필요가 없다. 왜냐하면 그 논의는 괴델의 불완전성 정리의 증명에 필요한 초수학적 전제를 논의하는 과정에서 이미 살폈으며 우리는 이제 일체 그러한 전제 없이도 똑같은 결론을, 즉 괴델의 불완전성 정리는 안으로부터도 그 타당성이 의문시 될 수 있음을 보여주고자 하기 때문이다. 따라서 스멀리언이 위의 관계를 "산수적"이라고 부르는 이유를 문장의 증명여부와 관련시키지 않고 단지 산수체계에서 사용되는 기호로 표현되었다는 점, 그리고 그것이 그 어떤 산수적 해석을 이미 거쳤다는 점에 있다고만 주장한다 하여도 구태여 반론을 제기하지 않는다.

25. 다음으로 여러 종류의 초언어적 술어, 관계가, 예를 들어 "변항", "숫자", "개체항(term)", "원자 문장", "공리"등등이 산수화되는 과정을 살펴보자. 우리는 공리체계 S에 대한 일련의 초수학적 술어를 위의 병치함수를 바탕으로 이 술어의 명시적 정의를 바탕으로 산수화 한다. 이 과정에도 우리의 산수적 지식은 적극 개입된다. 예를 들어 보편양화사가 제한되는 경우 대부분 그것은 주어진 두 괴델수의 크기 비교를 전제로 하고 있다. 따라서 괴델화를 바탕으로 초수학적 술어의 산수화 과정에는 3가지 전제가 필요하다. 첫째 괴델화 규칙, 둘째 산수적 참에 대한 결정능력, 그리고 셋째 초수학적 술어에 대한 명시적 정의가 그것이다. 해서 주어진 S의 한 표현 "E_n"이 특정한 초수학적 술어 F를 만족하는지 여부는 두 가지 방식으로 결정될 수 있다. 첫째 문제의 초수학적 술어의 정의를 그 표현이 만족하는가를 괴델화와 관계없이 직접 판단하는 방법, 둘째 문제의 표현의 괴델수 n이 산수화된 초수학적 술어 $F_{arit}(x)$에 문제의 괴델수를 대입하여 얻어지는 닫힌 문장 "$F_{arit}(\mathbf{n})$"의 진리값을 검토하는 방법이 있다. 이때 이 두 과정의 결과가 서로 **직접 함축**하여야 할 그 어떤 이유도 없음을 이해하는 것은 중요하다. (그것은 연주된 음악과 이를 녹음한 CD상의 정보와의 관계에 비유될 수 있다. 이 양자간에 그 자체로는 일체의 필연적 관계를 설정할 아무런 이유도 없다.) 양자를 서로간의 함축관계로 맺어 주기 위해서는 **특정한 괴델화**가 필요하나, 이 괴델화는 분

명 **임의적**이다. 따라서 우리는 "F_{arit}(**n**)"의 진리값을 결코 "E_n"이 F라는 초수학적 술어를 만족시킨다는 사실로부터 직접 추론하여도, 또 그 역도 행하여서는 안된다. 즉 "'E_n' ε F ↔ F_{arit}(**n**)"이라는 쌍조건문의 성립을 위하여 우리는 그 양날개가 서로간에 **독립적으로 진리값이 결정될 수 있음이** 전제되어야 함을 이해할 수 있다. 그렇지 않고 양자간의 직접적인 함축을 설정할 경우, 그것은 괴델화의 임의성을 망각하고 괴델화 자체를 초언어의 산수체계에 새로이 추가된 규칙으로 받아들였음을 의미하는 것이다.

26. 예를 들어보자. "n+m=p"라는 등식이 주어지고 임의의 숫자 **k**의 괴델수를 각각 13^k이라고 가정하면 우리는 "n+m=p ↔ g(n)xg(m)=g(p)"가 성립함을 알 수 있다. 이때 쌍조건문의 양날개는 서로간에 그 어떤 직접적인 함축관계를 설정해야 할 아무런 이유도 또 가능성도 없다. 우리는 그러나 "13^nx13^m=13^p"이 성립됨을, 즉 지수함수에 대한 산수적 정리를 알고 있고 이에 덧붙여 이미 도입된 괴델화규칙을 알고 있기 때문에 위의 쌍조건문의 성립을 인정할 수 있는 것이다. 바꿔 말해 위의 쌍조건문의 오른쪽 날개는 왼쪽 날개로부터 **독립적으로** 근거 지워질 수 있어야만 한다. 만일 이 양쪽 날개의 독립성이 상실된다면 사실상 새로운 추론규칙이 도입된 것과 다름없으며 그것은 새로운 산수체계를 의미한다.

27. 이제 초언어의 산수체계에서 궁극적으로 증명과 증명된 문장간의 관계도 산수적으로 표현가능하게 되었다고 치자. 이제 그것을 "B(x,y)" (x는 증명된 문장의 괴델수, y는 증명의 괴델수)라고 부르고 또 어떤 산수문장 A의 증명이 종이 위에 쓰여져 눈앞에 놓여 있다고 가정하면 우리는 산수문장 B(n,m)이 참임을 알 수 있다. 왜냐하면 "⊢A ↔ B(n,m)"이 성립하기 때문이다. 그러나 다른 한편 산수문장 A의 증명여부와 산수문장 B(n,m)은 그 자체만 두고 볼 때 서로 함축해야 할 아무런 근거도 없음을 이제 충분히 이해할 수 있다. 이 등치관계는 오로지 주어진 괴델화의 가정 하에서만 성립하나 그 괴델화의 규칙은 임의적인 것이며 따라서 이때 만일 다른 괴델화가 도입된다면 또 다른 등치관계가 성립될 것임을 충분히 이해할 수 있기 때문이다.

28. 문제는 산수화된 "증명가능", "반증가능"이라는 술어라고 할 수 있다. 이들은 Σ_1-집합이며 제한되지 않은 존재양화사로 인해 이 집합에의 귀속여부가 효과적으로 결정가능한 것은 아니다. 그러나 괴델에 의한 증명의 경우 반증가능한 집합

R^*이 표상가능하여야 하며 그것은 이 집합에의 귀속여부가 공리화된 산수체계 내에서 증명을 통해 결정되어야 한다는 점을 의미한다. 여기에 바로 "열거가능" 이라는 중간단계가 필요한 이유가 있다. 즉 Σ_1-집합이 열거가능하다는 사실을 이용하여 초언어에서 정의된 한 산수문장의 "반증가능", "반증불가능" 여부를 양화사를 없앤 후 Σ_0-문장으로 만들어서 공리체계의 언어로 번역하는 것이다. 즉 양화사는 초언어에만 남는다. 이점은 우리가 아래의 "열거가능한 집합"의 정의를 살펴봄으로써 명확하다.

$B(v_1,v_2)$은 집합 R^*을 S에서 열거가능하다(enumerable)
$\Leftrightarrow$ 모든 자연수 n에 대하여: $n \in A \rightarrow$ 어떤 자연수 m에 대하여: $\vdash_S B(\mathbf{n},\mathbf{m})$,
$n \notin A \rightarrow$ 모든 자연수 m에 대하여: $\vdash_S \neg B(\mathbf{n},\mathbf{m})$

보편 양화사가 제거되어 대상언어적 공리체계 S로 보내진 무한히 많은 개별문장으로부터 다시 양화사를 도입하기 위하여 바로 ω-무모순성이 필요한 것이다. 즉 "$\vdash_S \neg B(\mathbf{n},\mathbf{0})$, $\vdash_S \neg B(\mathbf{n},\mathbf{1})$,..., $\nvdash_S \exists x B(\mathbf{n},\mathbf{x})$"가 S에 요구된다고 할 수 있다. 이점을 이용하면 R^*의 표상가능성은 쉽게 얻을 수 있다. "$\exists x B(v_1,\mathbf{x})$ ($\Leftrightarrow H(v_1)$)"이 바로 R^*을 표상하는 술어이다. 해서 괴델수 n인 산수문장의 반증여부에 대하여 "$n \in R^* \leftrightarrow \vdash_S H(\mathbf{n})$"가 성립한다. 그러나 반증가능 집합이 증명과정을 통해 그 귀속여부가 결정될 수 있다고 해서 이 쌍조건문의 성립의 전제가 사라지는 것은 물론 아니다. 즉 이 쌍조건문의 양날개는 서로간에 독립적으로 그 진리값이 확인될 수 있음을 전제로 해야만 한다. 그렇지 않으면 역시 새로운 추론규칙을 도입한 것과 흡사한 상황이 일어난다. 물론 "$n \in R^*$"의 참여부는 괴델수 n인 산수문장의 **실재적인** 반증여부를 통해, 그리고 "$\vdash_S H(\mathbf{n})$"의 참여부는 물론 "$H(\mathbf{n})$"의 S에서의 **실재적인** 증명여부를 통해 판단할 수밖에 없음은 분명하다.

"그러나 P(괴델문장, 필자 주)는 증명될 수 없다. 왜냐하면 만일 P가 증명된다면, 그것으로 그 문장이 증명될 수 없다는 것이 증명되기 때문이다." 그러나 P가 증명될 수 있다면, 혹은 내가 실수로 증명했다고 믿는다면, 왜 그 증명을 인정하고 "증명불가능"이란 표현에 대한 나의 해석을 포기하지 말아야 하는가? (수학의 기초, I, 부기3, §10)

이상하게 들리겠지만 괴델의 정리에 관한 한 나의 과제는 단지 수학에 있어서 "이것을 증명할 수 있다고 가정한다면"과 같은 문장이 무엇을 의미하는지 분명히 밝히는 데에 있을 뿐이다. (수학의 기초, VII, §22)

29.

$$\begin{aligned} n\in R^* &\leftrightarrow \vdash H(\mathbf{n}) \\ \vdash H(\mathbf{h}) &\leftrightarrow h\in R^* \\ &\leftrightarrow d(h)\in R \\ &\leftrightarrow \vdash \neg H(\mathbf{h}) \\ \therefore\ &\nvdash H(\mathbf{h}),\ \nvdash \neg H(\mathbf{h}) \end{aligned}$$

공리체계 S가 ω-무모순이면 또 무모순이라는 사실에서 우리는 "$H(\mathbf{h})$" 와 "$\neg H(\mathbf{h})$"가 동시에 증명될 수 없음을 알고 있다. 즉 쌍조건문의 양쪽날개가 서로간에 독립적으로 그 진리값이 결정될 수 없음을 말하는 것이다. 바꿔 말해 우리는 "$\vdash H(\mathbf{h}) \leftrightarrow \vdash \neg H(\mathbf{h})$"의 성립을 위한 전제를 더 이상 만족시킬 수 없고 따라서 그것이 성립하리라는 아무런 보장도 갖고 있지 못하다. 간단히, 위의 증명은 더 이상의 전제 없이는 인정될 수 없다. 어떤 전제가 더 필요할까? 무모순적인 공리체계 하에서는 "$\vdash H(\mathbf{h}) \leftrightarrow \vdash \neg H(\mathbf{h})$"의 성립을 위해서는 "$\nvdash H(\mathbf{h}),\ \nvdash \neg H(\mathbf{h})$"을 전제하는 것 이외에 다른 방도가 없다. 따라서 위의 증명에서 결론이란 이미 전제되어야만 하며, 그것은 순환논법의 한 예, 그 이상도 이하도 아니다.

30. 그러나 괴델의 불완전성 정리의 증명에는 "$H(\mathbf{h})$"와 "$\neg H(\mathbf{h})$"의 증명불가능성, 즉 결정불가능성만으로는 충분하지 못하며 "$\neg H(\mathbf{h})$"의 참이 필요하다. 또 "$\neg H(\mathbf{h})$"의 증명불가능성으로부터 "$\neg H(\mathbf{h})$"가 참이라는 사실을 끌어내기 위해서는 물론 "$n\in R^* \leftrightarrow H(\mathbf{n})$"의 성립을 전제로 한다. 그러나 바로 이 쌍조건문의 성립을 위해서는 역시 양날개가 서로간에 독립적으로 그 진리여부가 결정될 수 있어야 한다. "$n\notin R^*$"은 이미 전제되었고 문제는 "$\neg H(\mathbf{n})$"의 진리값만 남았다. "$n\in R^* \leftrightarrow H(\mathbf{n})$"의 성립을 위해서는 그러나 "$\neg H(\mathbf{n})$"이 참이라는 점이 요구되나 그것은 바로 증명하려는 바, 즉 "결정불가능하나 참인 문장의 존재" 그것 자체이다. 해서 괴델의 불완전성의 정리의 증명은 바로 그 증명하고자 하는 바를 전제하지 않으면 안된다. 바꿔 말해 괴델문장의 참은 괴델문장이 새로운 공리로 등장했음을 말하며 바로 이것이 위 쌍조건문의 양날개가 서로 독립적으로 근거 지워지지 않았음에도 불구하고 양자간의 함축관계를 **보았을 때, 믿었을 때** 일어나는 일이었다. 다른 표현으로 괴델화의 임의성으로 인한 반증여부와 "$H(x)$"간의 **외재적인 관계**가 규칙이 갖는 **내재적인 관계**로 바뀌었음에도 불구하고 우리는 이 사실을 못(안)보고 있는 것이다.

너는 말하기를 "..., 따라서 P는 참이고 증명불가능하다" 그것은 물론 "따라서 P"라는

말과 같다. 그래 네가 꼭 원한다면. 그러나 너는 도대체 무슨 목적으로 이 '주장'을 써대니? (그것은 마치 어떤 사람이 자연의 형태와 건축양식에 대한 특정한 원칙들로부터 아무도 살수 없는 에베레스트 산정 위에 바록크식의 작은 성이 있다라고 추론하는 것과 흡사하다.) 그러나 너는 어떻게 너의 주장이 참이라는 점을 정당화 할 수 있니? 왜냐하면 그 주장은 바로 그 마술 같은 증명(Kunststück:필자 意譯)이외에는 어디에도 쓸데가 없기 때문이다.(수학의 기초, I, 부기3, 19)

31. 성밖으로부터의 공격에, 즉 괴델문장을 "산수문장"이라고 칭할 수 있는 근거에 대한 질문에 괴델이 반응한다면 순환논법에 빠질 수밖에 없듯이 성안에서도 괴델화의 임의성과 간접성에 기인하는 산수화에서의 寫像수단과 寫像대상간의 독립성을 지적하였을 경우 벗어나는 방법은 순환논법 이외에는 없다. 그리고 괴델화의 임의성과 간접성, 그리고 이에 따르는 진리값의 독립적 결정가능성이란 조금만 성찰하면 괴델문장을 언제 "산수문장"이라고 부를 수 있느냐는 문제와 그 본질이 같은 것이다.

모자 속에서 비둘기가 나오고, 상자 속의 여인을 톱질하는 마술, 우리는 **실제로** 무대 위의 이런 광경을 **직접 관찰한다**. 그럼에도 불구하고 이 광경이 사실이 아니라고 믿는 이유는 우리가 알고 있는 인문-자연적 일반법칙에 근거한다. 바로 이 두 요소가 어떤 행위를 마술이라고 부르게 하고 또 그것에 흥미를 느끼도록 만드는 이유이기도 하다. 그러나 우리는 왜 직접 관찰한 사실을 사실이 아니라고 간주할 수 있는가? 일반법칙의 검증의 고리는 결국 직접적인 관찰로 귀결되는 것은 아닌가? 물론 그렇지만 그럼에도 불구하고 마술행위를 마술로 보는 것은 우리가 현실을 바라보는 눈에는 특정한 보는 방식이 있기 때문이고 그것은 대부분 전제가, 비록 이 전제를 만족시킬 수 없는 경우가 극히 예외적이라 하더라도, 딸려있기 마련이며 바로 이 전제가 무대 위에서 사라졌음에도 계속, 관성에 의해, 혹은 마술사의 유도에 안내되어 그 보는 방식을 견지할 수 있음을, 바꿔 말해 눈속임을 당할 수 있음을 알기 때문이다. 괴델의 불완전성의 정리의 증명, 바로 그것은 일종의 마술인 것이다.

32. 동양의 상식적인, 그러나 천박하지 않은 지혜 중 "눈이 스스로를 보지 못하고, 손가락이 스스로를 가리키지 못한다"는 말이 있다. 이것은 수단과 대상이 동일시될 수 없다는 사실을 지적하며 일체의 자기정당화를 부정한 것이다. 이 글 §6의 그림1에서 살펴볼 수 있듯이 대각선상의 대각화된 문장들의 반증여부를 비추는 "H(x)"는 **비추는 수단**이다. 이것이 이른바 자기지시적으로 해석될 수 있는 문장

을 만들기 위해 스스로 대각화 될 경우, 즉 "H(h)"에서 **비추는 수단**과 **비춤의 대상**이 일치하게 된다. 자기 스스로를 비출 수 있는 거울이 물리적으로 존재할 수 없듯이 괴델화를 통한 산수적 거울 역시 자기 스스로를 비출 수 없는 것이다.

참고문헌

Davis,P. J.(1972): Fidelity in Mathematical Discourse:Is One and One Really Two? In T. Tymoczko, ed. *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Boston/Basel/Stuttgart 1986

Frege, G.(1897): Logik. In H. Hermes $ F. Kambartel $ F. Kaulbach, eds. *G. Frege. Nachgelassene Schriften*, Hamburg 1969

Kutschera, F. V.(1964): Die Antinomien der Logik. München

Putnam, H.(1975): What is Mathematical Truth? In T. Tymoczko, ed. *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Boston/Basel/Stuttgart 1986

Smullyan, R.(1992): Gödel's Incompleteness Theorems, New York

Wittgenstein,L.:Tractatus-logico-philosopicus

Philosophische Untersuchungen

Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik