카오스 現象과 자본시장의 價格形成 메카니즘*

李 逸 均(明知大學校 教授)

< 要 約 >

이 논문에서는 주가가 카오스에 의하여 생성되는 과정인가 아닌가를 실증분석을 통하여 규명하였다. 어느 시계열이 불규칙하게 보이지만 이 형태가 확률적 과정에 의하여 형성되는 것이 아니라 결정론적 비선형 동태에 의하여 만들어지고 이 비선형동태의 운동이 초기조건에 대한 민감한 의존성을 갖고 동시에 자기 닮음의 성질을 가지면, 이 시계열은 카오스에 의하여 생성된다. 주가가 카오스과정을 따르면 주가는 단기적으로는 예측이 가능하다.

일별 종합주가지수와 주별 종합주가지수를 사용하여 주가에 대한 카오스검정을 수행하였다. 카오스 이외의 요인으로부터 발생하는 비선형성을 시계열에서 제외시키고 카오스 성질만을 남게 한 후 독립적인 동등분포성을 검정하는 BDS검정법, 가우스性(정규성)과 카오스 비선형성에 대립되는 선형성의 검정을 목적으로 하는 二分光法 또는 Hinich 검정법, 초기조건에 대한 민감한 의존성을 판별하는 리아푸노프 지수에 대한 검정법, 자기닮음 여부의 검정, 그리고 쪽거리 지수에 대한 검정을 통하여 주가가 카오스系에 속하고 있다는 가설이 기각되었다.

카오스에 의하여 생성되는 비선형성은 존재하지 않으나 장기기억이나 지속성에 의해서도 비선형성은 형성될 수 있으므로 이에 대한 검정도 수행하였다. 검정 결과 비선형성이 존재하고 있으며 이 비선형성은 주가 과정에 가해진 충격들이 사라지지 않고 존속하며 이 충격들의 총화에 의하여 이루어지고 있음을 알 수 있었다. 아울러 주가는 정규분포 白色雜音過程을 따르고 있음이 발견되었다.

핵심단어: 카오스, 쪽거리, 상관적분, 소파장, 리아푸노프지수

* 이 논문은 1997년 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음

Ⅰ. 서 론

· 物不可窮也 故受之以未濟終焉1)

· ἆρα ἔχρυψας τὸν χρυςοῦν ἵππον;2)

재무관리의 세계 속에는 일견 무질서하고 불규칙하게 보이는 데이타가 많이 있다. 이와 같은 무질서하고 복잡한 현상은 확률통계이론의 대상이 된다. 단순한 결정론적 법칙에 따르는 시스템은 규칙적이고 질서있는 행동을 나타내고, 다른 한편 불규칙하고 무질서한 행동을 나타내는 현상은 그 법칙이 너무 큰 自由度를 갖는 복잡한 것이며 그 해석은 확률통계이론의 대상이라고 생각되었다. 결정론적 계의 연구방법과 확률통계이론의 응용에 의한 연구방법을 재무관리의 연구에 확대적으로 도입하여 옴으로써 재무현상을 파악하는데 괄목할 만한 성과를 거두어 왔다.

결정론적 입장에서 진행된 재무관리에 대한 연구에서는 재무 현상을 결정론적 系로 파악하여 모형들이 정립되었다. 이 모형들은 통계학적 방법을 사용하여 현실 적합성 여부를 검정하였다. 실증분석은 현실과 모형의 괴리현상, 주가나 주식수익률의 變動性 등을 비롯한 여러 가지 무작위성의 존재를 제시해 왔으며 이와 같은 점들을 파악하기 위하여 단순한 검정기법으로부터 고도의 기법에 이르기까지 광범위하고 다양한 방법론을 사용해 왔으나 현실을 만족스럽게 기술하는데 미흡한 감이 있으며 설명력과 예측력의 측면에서도 현실로부터의 일탈의 정도가 컸다. 재무관리에서 표명되고 있는 현실과 이론의 괴리현상은 이론연구에 전통적으로 적용해 오고 있는 고전역학에서 정립된 결정론적 계에 대한 인식방법때문에 발생할 수도 있다는 가능성이 존재하고 있으며, 결정론적 카오스가 재무관리에서 관찰되는 무작위성의 많은 부분의 원인이 될 수도 있다는 소지도 존재할 수 있다. 특히 변동성에 대한 연구에서 암시하는 바는 자본시장의 운동이 규칙적

1) 사물은 궁할 수 없는 것이다. 그러므로 이것을 未濟로 받아서 끝을 맺는 것이다.(周易 序卦傳)

2) 너는 黃金馬를 숨겼느냐?

인 고전계에 대응되는 것이 아니라 불규칙적 상황과 경향을 보이고 있기 때문에 카오스계에 대응된다는 가설인 것이다.

카오스란 어떤 系가 확고한 규칙, 즉 결정론적 법칙에 따라 변화하고 있음에도 불구하고, 매우 복잡하고 불규칙하면서 동시에 불안정한 행동을 보이고 있어서 먼 미래의 상태를 전혀 예측할 수 없는 현상이다. 카오스는 일반적으로 결정론적 계에서 일어나는 확률적 운동이라고 정의할 수 있다. 결정론적 운동은 정확하고 확고한 법칙을 따르며, 결정론적 계에서 나타나는 불규칙 운동은 어느 측면에서 보면 법칙이 없는 것으로 보인다. 말하자면 카오스는 전적으로 법칙을 따르는 법칙이 없는 운동이라고 할 수 있다. 불규칙한 현상의 기하학적 구조가 일종의 카오스인 것이다. 구름은 둥그렇지 않고 산은 고깔모양이 아니며 해안선은 원이 아니고 돛배는 매끈한 곡선이 아니고 번개는 직선으로 결코 나아가지 않는다. 자연계는 구조적 불균형을 갖고 있으며 선형성이 아니라 非線形性의 세계이다.[3]

유크리드 기하학이 대칭을 전제로 하고 있는 반면, 쪽거리 기하학(fractal geometry)은 비대칭을 기반으로 하고 있다. 유크리드 기하학에서는 따라서 직선이 노름(norm)으로 중요시되며 쪽거리 기하학에서는 쪽거리가 기본이다. 유크리드 기하학에서는 자연현상을 직선의 개념으로 보기 때문에 유크리드 기하학적으로 어떤 대상을 그리면 그 대상을 완벽하게 복제할 수 없으며 近似的으로만 복제된다. 그러나 쪽거리는 곡선의 성질을 탐구하고 있으므로 불완전한 복제를 극복할 수 있는 길을 열어주고 있다. 이것은 전체의 작은 부분들을 점차 확대해 나감으로써 자기닮은 사물이나 과정의 극한적인 극미소 구조를 발견하는 방법이다. 자기닮은 사물들은 특정적인 길이규모를 갖지 않는다. 이것들은 서로 다른 여러 측정 규모 상에서 같은 모습으로 보인다. 삼각형, 원, 구, 원통 등과 같은 유크리드 기하학의 형태들이 확대되면 그 구조를 잃는다. 원이 확대되면 평평한 직선이 된다. 원에서 점점 더 작은 원호를 원래의 길이가 되도록 확대해 나가면, 점점

3) 유클리드 기하학에서는 이같은 모든 현상이 직선(선형성)으로 파악된다. 울창한 숲속의 한 그루의 나무는 직선의 형태를 갖고 있는 것으로 파악하고 그 나무의 형상에 관한 이론을 전개하고 있다. 그러나 자세히 관찰하면 그 형태는 선형이 아니라 비선형이다.

곡률이 줄어들어 직선으로 수렴해 간다. 이러한 수렴과정을 통해 원이 내포하는 무한소의 편편성의 파악이 가능하며 근사적 자기닮음이 정확한 자기닮음으로 전환되어 간다. 非標準數學에 사용되는 무한소가 중요시되어 이 무한소를 다루는 미분방정식이 카오스에서 많이 연구되고 있다. 원을 확대하면 편편한 직선이 되듯이 지구도 인간이 아주 작기 때문에 편편하게 보인다. 넓은 범위의 규모에 걸쳐 상세한 구조를 계속 나타내는 사물을 기술하기 위한 거리가 쪽거리이다. 이상적인 수학적 쪽거리는 무한 범위의 규모에 걸쳐 구조를 갖는다. 예컨대 해안선이 쪽거리에 해당된다. 해안선에는 만과 곶이 있고 각 만은 자기 자신의 작은 만과 곶들을 갖고 있고, 이 작은 만과 곶은 다시 더 작은 만과 곶을 갖고 있다. 즉, 자기닮음의 현상을 갖고있다.

유크리드 기하학에서는 차원이 정수이다. 그러나 쪽거리의 세계에서 차원은 반드시 정수일 필요가 없다. 해안선은 쪽거리 차원이 1.15와 1.25사이이다. 비유크리드 기하학이 유크리드 기하학을 내포하므로 쪽거리 차원이 유크리드 차원을 포함하는 것은 자연스럽다. 우주의 구조는 물질이 고르게 분포되어 있다는 의미의 균일함이 아니고 쪽거리 분포의 측면에서 균일하다. 쪽거리는 사물자체의 복제들로 쪼개진다. 즉, 반복되는 기하학적 형태인 것이다. 쪽거리에서는 반복과정이 영원히 계속된다. 말하자면 전체와 동일한 형태가 전체 속에서 계속 반복된다. 부분이 전체를 표상하고 전체가 부분을 표상한다. 부분을 통하여 전체를 알게 되며 전체를 통하여 부분에 대한 지식을 갖게 된다.

위에서 논의한 쪽거리에 의하면 자기닮음, 장기기억, 반복특성, 주기성이 카오스에서 중요시된다. 자본시장이 이와 같은 성질을 갖는다면 효율적 시장가설은 재검토가 불가피하다. 자본시장이 카오스에 의하여 움직이면 이 시장에서 생성되는 시계열은 카오스 시계열이 될 것이며 단기적으로는 자본시장의 움직임을 예측할 수도 있다. 왜냐하면 카오스에서는 시계열 자료가 어떤 특정한 형태를 갖게 되며 이 시계열 데이타를 생성시키는 함수는 카오스의 운동법칙에 따라 움직이기 때문이다. 결정론적 카오스는 겉보기에 확률적이지만 그 속에 숨겨진 구조가 존재한다는 것이 카오스의 요체이다.

본 논문은 카오스의 성질과 특성을 규명하고 카오스 이론을 우리나라의 자본시장에 적용하여 자본시장이 카오스 성질에 의하여 운동하고 있는지의 여부를 실증적으로 파악하는데 그 목적이 있다. 실증분석을 통하여 발견된 성질을 이용하여 자본시장의 행동을 기술·설명·예측할 수 있는 가능성을 심도있게 탐구하고자 한다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 제2장에서는 카오스의 성질을 실증분석과의 관련 하에서 규명하고, 카오스에 대한 그간의 연구결과를 검토한다. 제3장에서는 검정방법을 제시하고 제4장에서는 검정결과를 해석한다. 제5장에서는 비선형성이 카오스이외의 곳에서부터 발생하고 있는지의 여부를 점검한다. 제6장에서는 결론을 제시한다.

II. 카오스 성질

카오스 動態系는 확률적으로 보이는 解経經를 산출하는 결정론적 系이다. 시간경로가 상당히 복잡하다. 수열이 초기조건에 대한 민감한 의존성, 定常性과 非週期性이라는 세 개의 성질을 가지면 이 수열은 카오스라 한다. 시간이 무한에 접근함에 따라 평균상관함수가 0으로 수렴하는 수열은 정상적이다. Strogatz(1994) 등을 참조하면서 카오스의 성질들을 실증분석의 관점에 입각하여 살펴보도록 한다.

고립된 非安定的인 点 P가 존재할 때 이 点의 근방에 있는 값 몇 개를 초기값으로 갖는 系의 狀態空間이 존재하는 경우가 있다. 이것이 카오스 현상이다. 系가 가는 장소, 즉 궤적이 수렴하는 상태공간 내의 点集合을 끌개라 하는데, 이 끌개를 전통적 관점에서는 하나의 점이나 폐곡선으로 간주하였다. 재무관리에서는 동태적 과정이 균형을 이루거나 또는 질서정연한 행동을 형성한다고 보아 왔다. 그런데 카오스 이론에 의하면 非線型系의 끌개는 이상한 쪽거리 集合으로 이 집합내에서 이 系의 상태가 카오스 방법으로 끊임없이 전개된다.

수열 $\{S_t\}$의 집적점들을 모아 집합 S를 형성하면 이 S가 끌개(attractor)집합이다. 수열 $\{S_t\}$는 함수 f를 계속 반복적용할 때 산출된다. 극한에서 궤적들은 초기조건 S_0이 끌개집합에 충분히 접근해 있는 한 이 끌개집합의 지배를 받게 된다. 끌개집합이 조성하는 끌림영역(domain of attraction)은 초기조건에서 출발한 궤적이 궁극적으로 끌개집합의 지배를 받게 되도록 형성되는 초기조건들의 집합의 폐포이다. 일단 끌개집합의 지배를 받게 되면 궤적은 끌개집합 내부이거나 또는 근처에서 영원히 배회한다. 그리고 끌개집합 내에서 지배를 받는 경로의 움직임은 끌개집합의 기하학에 영향을 받는다.

수열이 고정점으로 수렴하면 끌개는 하나의 극한점만을 갖는 단위집합이 된다. 따라서 차원이 0이다. 이 단위집합 끌개를 期間 1의 끌개라 한다. 끌개집합에 두 개의 점이 있으면 이 수열은 분리되어 있는 이 두 점에 의하여 동시에 끌릴 것이다. 따라서 이 두 분리된 수열의 점들 사이에서 진동할 것이다. 이 두 점은 각각 서로 다른 극한점으로 수렴한다. 이 끌개가 期間 2의 끌개이다. 이 현상은 모형의 모수값들이 선정됨에 따라 이 값들이 함수 f의 전환점의 높이로 하여금 원래의 단일 극한점이 두 개의 집적점으로 분기(bifurcation)되는 임계점을 지나도록 할 때 발생한다.

모형의 모수들이 더욱 움직여 나가면 분기할 당시에는 일치하고 있었던 두 집적점이 다시 분기된다. 그러면 배가 된다. 따라서 분기할 때마다 집적점의 수는 배가 된다. 이렇게 하여 p주기의 수가 증가한다. 주기가 n이면 끌개는 n-torus이다. 분기가 무한히 발생하면 끌개집합은 무한개의 점을 포함한다. 이때 끌개는 쪽거리가 된다. 이와같은 끌개집합을 카오스 끌개 또는 '이상한' 끌개라 한다. 지금까지 알려진 카오스동태계에서는 이상한 끌개가 존재하고 있다. 따라서 시계열에서 이상한 끌개가 존재하면 이 시계열이 카오스일 가능성이 높다. 끌개가 이상한 끌개이기 위한 필요충분조건은 끌개의 차원이 非整數일 때, 즉 끌개가 쪽거리일 때이다.

이상한 끌개의 궤적 위의 점들은 결코 반복되지 않는다. 여기에서 카오스는 非週期的이다. 이것은 동일한 상태가 두 번 반복되지 않는다는 것을 의미한다. 연

속적반복에 있어서 상태벡터는 유한의 범위 내에 존재하며 ±∞에 접근하지 않는다. 그러나 이상한 끌개는 점들의 단순한 교란과는 상이하다. 어떤 系의 모든 가능한 궤적들이나 解들의 공간인 국면공간(phase space)에 이상한 끌개가 나타난다. 이상한 끌개는 어느 계의 장기적 동태에 연관되어 있다. 그러므로 이 궤적들이 초기에는 나타나지 않다가 장기적으로 가면 발생한다. 이상한 끌개의 쪽거리차원은 상관차원을 적용하여 구할 수 있다.

쪽거리를 갖는 대상은 자기 닮음을 나타내 준다. 카오스 시계열은 쪽거리 차원에 의하여 자기닮음이 생성된다. 이 자기닮음이 카오스의 중요한 성질 중의 하나이다. 자기 닮음 쪽거리의 쪽거리차원은 닮음 차원과 동일하다.[4)]

함수 f가 단조증가 함수이거나 단조감소 함수이면 상태벡터는 한 방향으로 움직이며 그 방향으로 추세를 가질 것이다. 그러나 카오스에서는 함수 f가 적어도 하나의 전환점을 가져야 한다. 대부분의 중요한 극한성질은 f의 함수의 선정과는 거의 완벽하게 독립적이다. 전환점의 중심에서의 f의 성질만이 중요하다. 카오스의 초기상태를 기술함에 있어서 f의 성질들의 이와 같은 준독립성을 거리적 보편성이라 한다. 함수 f에서 전환점이 존재하면 f는 非可逆的이다.

동태계에에 있어서 초기조건들에 대한 민감한 의존성의 존재 여부, 즉 카오스性을 검정하는 가장 중요한 방법이 지배 리아푸노프 지수(Lyapunov exponent)에 의한 것이다. 이 지수는 초기조건들이 무한소의 극미한 차이를 갖되 모든 면에서 동일한 궤적들간의 평균 지수발산이나 평균 지수수렴을 측정하는 통계량이다. 양의 리아푸노프 지수를 갖는 有界系는 카오스행동을 보유하고 있다.

리아푸노프 지수 λ는 궤적들 간의 장기발산율이나 장기수렴률이다. 양의 λ는 두 개의 이웃해 있는 궤적들 간의 지수적 발산을 측정하는 측도이며 이것이

4) 시계열에서 자기닮음의 형성은 최초의 모양과 이 모양의 복제형은 모습은 동일하지만 복제된 형은 크기가 축소된다. 자기닮음이 반복되어 나감에 따라 동일한 모양이 형성되어도 크기는 복제되어감에 따라 축소된다. 따라서 닮음 차원은 다음과 같이 정의된다.

$$D_{sim} = \frac{\log(\text{복제의개수})}{\log(\text{축소})}$$

곧 카오스의 성질 중의 하나이다. 그러나 음의 λ는 두 개의 인접한 궤적들 간의 지수적 수렴을 표상하는 측도이다. 따라서 두 인접한 궤적이 수렴하여 하나가 되면 초기조건의 차이가 발생하여도 일정한 기간이 경과하면 서로 다른 값에서 출발한 궤적이 일치하여 하나가 된다. 따라서 카오스의 성질을 갖지 않는다.

리아푸노프 지수는 초기조건이 거의 동일하지만 시간 t가 상당히 클 때 N번의 반복적 행동을 수행한 후 이 궤적들 간에 발생하는 거리를 평가한 것이다.[5] 분리의 정도를 평균 지수적 분리의 측도로 삼은 것이다. 두 초기조건이 무한소로 미세한 차이밖에 갖고 있지 않아도 일정한 기간이 경과한 후에는 두 궤적이 유사성이 존재하지 않을 정도로 분리되어 있는 것이 카오스이다. 따라서 카오스는 리아푸노프 지수를 사용하여 정의할 수 있다. 즉 리아푸노프 지수 중 적어도 하나가 양수인 系는 카오스이다. 카오스에 있어서는 리아푸노프 지수들의 합은 음수이고 적어도 리아푸노프 지수들 중 하나는 양수이어야 한다.

요컨대, 카오스는 초기조건들에 대한 민감한 의존성을 표상하는 결정론적 계에

---

5) 함수 f와 초기값 x_0가 주어졌다 하자. 초기조건 x_0를 f에 적용하면 $f(x_0)$를 얻는다. x_0를 적용하여 얻은 값, 즉 $f(x_0)$을 f의 투입값으로 하여 f에 대입하면 $f(f(x_0))$이 된다. 이것을 편의상 $f^2(x_0)$이라 하자. 이와 같은 과정을 N번 반복하면

$$f^N(x_0) = f(f^{N-1}(x_0))$$

이 성립한다. 그러면 리아푸노프 지수는 다음과 같이 정의된다.

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left|f^N(x_0) - f^N(x_0+\varepsilon)\right| = \varepsilon e^{N\lambda(x_0)}$$

리아푸노프 지수는 일반적으로 x_0의 선택과는 독립적이다. 이 정의에 의하면 이 지수는 두개의 이웃한 점들이 평균지수적 간격에 대한 측도인 것이다. 위 식에 대수를 취하고 ε을 $(x_0+\varepsilon)-x_0$으로 취하고 $\varepsilon\to 0$과 $N\to\infty$를 취하면 리아푸노프 지수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\lambda(x_0) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log\left|\frac{df^N(x_0)}{dx_0}\right|$$

서 형성되는 비주기적 장기적 비선형 행동양태나 운동형태인 것이다. 비주기적 장기행동양태라는 것은 $t \rightarrow \infty$함에 따라 고정점 또는 기간적 궤도에 정착하지 않는 궤적들이 존재하고 있음을 의미한다. 결정론이란 系가 확률적 또는 잡음적 투입이나 모수를 갖고 있지 않는다는 것을 뜻한다. 불규칙적 행동양태는 잡음적 추진력으로부터 발생하는 것이 아니라 이 계의 비선형성에서 발생한다. 초기조건들에 대한 민감한 의존성은 인접한 궤적들이 지수적으로 빠르게 분리된다는 것을 뜻한다. 초기조건들에 만감하게 의존하고 있음을 제시하는 끌개가 이상한 끌개이다.

자본자산의 가격모형이 선형모형이냐 비선형모형이냐는 중요한 사항이다. 單位根 分析을 비롯한 여러 기법은 가격이 비선형모형으로 존재할 수 있다는 암시를 제시하고 있다. 특히 非線型 動態로 표현될 수도 있다는 것이다. 가격은 현재까지 고전 물리학의 결정론적 계에 의하여 형성된다고 보았는데, 결정론적 계가 특히 동태적 상황에서 카오스 성질을 갖고 있을 수 있다. 이 때에는 결정론적 계에 확률적 운동이 작용하여 동태 계는 카오스 계가 된다. 이와 같은 상황에서 非線型 動態가 존재할 때 결정론적 계는 지속적인 추세, 주기적 또는 비주기적 사이클, 장기상관관계, 장기적 기억 등을 나타내 주는, 확률적으로 보이는 결과를 생성시킬 수 있다.

주가가 결정론적 계에 속하는 계로서 주가의 동태적 성질이 카오스라면 재무관리 연구는 근본적인 면에서 검토를 시작해야 한다. 현재까지는 재무관리에 대한 연구의 기본전제는 재무변수들이 카오스 동태적 성질을 갖지 않는 결정론계에 속하고 있다는 것이거나 또는 결정론적 系에 확률적 系가 선형으로 결합된 系라는 것이다. 결정론적 계에 확률적 계가 선형으로 결합된 系를 전제로 하여 확률적 계의 성질을 파악하는데 역점을 두고 재무관리에 대한 연구가 진행되어 오고 있으며, 그 결과 많은 성과를 거두어 왔다. 그러나 전통적으로 상정된 이러한 系가 부정되고 결정론적 계중 카오스 系가 재무변수들의 운동의 전개를 생성시킨다는 전제가 실증분석을 통하여 받아들여진다면, 지금까지 발견하고 정립해 온 이론과 성질들은 카오스 관점에서 검토하고 타당성이나 성립여부를 규명해야

한다. 이 규명을 통하여 카오스系에서도 불변으로 성립하고 있는 성질을 밝혀내야 한다. 그러나 이와 같은 작업은 용이하지 않다. 예컨대, 효율적 시장가설이 성립하면 주가의 예측은 불가능하다. 그러나 주가의 생성 메카니즘이 카오스계이면 주가는 단기적으로는 예측이 가능하나 장기적으로는 예측이 불가능하다.

경제시계열이 결정론적 과정과 확률적 과정의 결합으로 파악되고, 확률적 과정은 평균이 0이고 유한의 분산을 갖는 정규분포를 따른다는 가정 하에 시계열 모형을 정립하고 경제현실을 분석하여 미래를 예측할 수 있는 모형을 정립하는데 그동안 재무학계가 노력을 경주하였다. 그러나 단위근의 존재여부, 공적분과 오차정정 등 많은 연구에서 뉴톤의 고전역학적 방법에 의한 결정론적 과정 그 자체도 단순하게 파악할 수 있는 것이 아니라는 것이 입증되었다. 고전적 결정론적 과정을 이룬다고 생각되던 시계열내의 구성분도 확률적 과정을 따르거나 분산과 깊은 연관을 맺고 있다는 분석이 제시되었다. 따라서 경제시계열에서 確率的 非定常性의 성질과 범위가 중요시 된다.

시계열 분석에서 이동평균모형과 자기회귀모형을 결합시킨 ARIMA(p, d, q)에서 차분계수 d는 정수이다. 그런데 쪽거리를 고려할 때 d가 반드시 정수일 필요가 없다. Hosking(1981)은 차분모수를 정수 대신 분수도 가능케하여 확대시킨 ARFIMA 모형을 제시하였다. ARFIMA(p, d, q)에 d는 반드시 정수에 한정되는 것이 아니고 임의의 실수이다. 이 ARFIMA 모형은 카오스 분석과 시계열의 장기기억을 파악하는데 유용한 모형이다. ARFIMA(p, d, q)의 p와 q의 값에 따라서 AR과 MA의 단기기억과 장기기억의 혼합도 파악할 수 있는 성질을 갖고 있어 시계열의 지속성이나 비지속성, 그리고 기간주기를 판별하는데 유익하다. Fama와 French (1988)와 Poterba와 Summers (1988)는 재무시계열에 주기가 존재하고 있을 가능성을 암시하고 있다. 따라서 이 ARFIMA 모형을 사용하여 재무시계열의 주기성을 파악하는 것은 중요하다고 할 수 있다.

李逸均 (1995)은 ARFIMA(p, d, q)를 추정하였는 바, 우리나라의 주가시계열이 쪽거리 차원을 갖고 있으며 자본시장이 장기기억시장임을 입증하였다. 李逸均 (1994)은 우리나라의 증권시계열을 사용하여 Hurst process를 추정하였는 바, 이

시계열이 쪽거리 특성을 갖고 있음을 발견하고 있다. 따라서 장기기억과 지속성이 유지되고 있다. 李逸均 (1996)은 실증분석을 통하여 우리나라의 증권시장이 비선형성에 의하여 동태적으로 형성되고 있음을 제시하고 있다. 이와 같은 일련의 결과들은 우리나라의 증권시장이 카오스 성질에 입각한 행동양식을 가질 가능성이 있다는 것을 의미한다.

Weiss (1991)는 거미집 모형을 이용하여 카오스의 성질을 파악하고 구조적 안정성을 규명하고 있다. Savit (1988)는 재무시계열이 카오스 성질을 갖고 있음을 증명하고 있다. Shaffer (1991)는 재무시계열의 구조적 이동과 변동성을 연구하였는 바, 카오스 時間經路는 거래행동에 의해서가 아니라 근본원인에 의하여 형성되며 고정된 배당률과 같은 단순한 조건에 의해서 카오스가 발생하고 있음을 보여주고 있다. 단순한 카오스 모형에 의하여 증권시장에서 발견되는 양태와 유사한 양태의 변동성이 발생함을 발견하였다.

Eldridge (1993)는 하루 내에 거래되는 데이타(intraday data)를 사용하여 카오스의 존재여부를 검정하였는 바, 주가결정구조에 카오스 구성분이 존재하고 있음을 제시하고 있다. Gilmore (1993)는 위상수학의 이론을 이용하여 거리방법에 의한 카오스의 검정법과 위상적 방법에 의한 카오스의 파악 방법을 개발하였다. 그는 시뮬레이션을 통하여 위상수학적 방법이 견실함을 보여주고 있다.

재무관리 분야에서 카오스에 대한 연구는 미미하다. 非 카오스 접근법에 의한 연구에서 카오스 현상이 발견되고 있음을 알 수 있다. 이와 같은 사항은 단위근 분석과 ARCH계열 분석에서 두드러지게 나타난다. 시간의 흐름에 걸쳐 변하는 분산과 공분산 모형에 도입한 시계열 모형이 Engle (1982)의 자기회귀 조건부 이분산 모형을 중심으로한 ARCH 계통의 모형들이다. 시계열의 분산이 시간의 변화에 따라 이분산을 이 시계열의 과거의 값의 제곱의 1차함수로 표현한 것이 ARCH 모형이다. 시계열이 재무·금융 시계열인 경우 變動性이 集中化되는 현상, 즉 t期에 가격이 크게 변하면 t + 1期에도 가격이 크게 변하나 부호가 양인지 음인지는 예측할 수 없는 현상을 제시한다. Engle과 Mustafa (1992)를 비롯한 학자들의 연구에서 ARCH 모형을 주식시장에 성공적으로 적용할 수 있으며 변

동성의 집중화 현상이 발견되었음이 제시되고 있다. 나아가 주말효과 역시 ARCH에 의하여 인식이 된다. 요컨대 ARCH는 시간에 따라 변동하는 위험에 대한 프리미엄을 발견하는데 중요한 역할을 담당하고 있다. 결정론적 카오스에서도 유사한 결과가 형성되었음을 밝히고 있다.

Brock, Dechert와 Scheinkman (1987)은 카오스를 주식수익률의 非線型性과 연결시키고 있는데 ARCH효과를 제거한 표준화된 잔차에 대하여 검정한 결과 비선형적 의존성의 증거가 별로 없음이 발견되었다. 여기에서 카오스와 ARCH와의 관계의 정립이 요청된다고 할 수 있다.

시계열의 분산이 시계열의 제곱뿐만 아니라 과거의 시계열의 분산에도 의존하는 형태가 Bollerslev(1986)의 GARCH(p, q)모형이다. 재무관리에서 이론적 모형은 연속시간의 틀안에서 정립하고 이 모형에 사용할 데이타는 이산시간으로 수집된 것이다. Nelson (1990)에 의하면 표본구간이 적을 때 GARCH(1, 1)은 연속시간 확산모형으로 수렴한다는 점을 보여주고 있다. GARCH 모형에서 분산은 시계열의 크기에만 의존하고 시계열의 부호에는 의존하지 않는다. 부채효과가 존재하는 주식시장에서는 이 모형을 이용하기가 어렵다. Nelson (1990)은 이 점을 모형에 도입한 지수 GARCH 모형을 제시하고 있다.

Beveridge와 Nelson (1981)은 단위근을 갖는 시계열은 確率的 趨勢와 평균이 0인 定常 時系列로 분할하여 그 합으로 표시할 수 있음을 제시하였다. 일반적으로 추세는 결정론적인 것으로 간주되었다. 인구, 기술, 자본축적 등과 같은, 장기추세를 결정하는 요인들은 확률적이라고 할 수 있다. Nelson과 Plosser (1982)가 지적한 바와 같이, 총산출량에 대한 추세정상성은 경기변동의 존재여부와 성질, 異時的 對替의 가능성, 충격의 지속성 등에 의미하는 바가 서로 다르다. 단위근의 존재는 경제에 가해진 충격이 시간의 흐름 속에 존재한다는 것을 의미한다. 單位根은 경제적 충격이 영원한 성질을 갖는가 일시적 성질을 갖는가를 판별하는데 유용하다. 충격의 지속성 여부를 판단하는데 중요한 역할을 담당한다.

단위근과 ARCH계열의 모형들을 살펴 보면서 얻을 수 있었던 것은 전통적 방법에 의하여 정립된 이 모형들이 카오스 현상이 존재할 수도 있음을 제시한데

있다. 분산이 시간에 따라 변하고 위험이 시간에 따라 변한다. 평균도 시간에 따라 변한다. 그렇다면 결정론적 계의 확률적 운동에 의하여 자본시장을 비롯한 경제현실을 기술하고 설명하고 예측할 수도 있다는 암시를 도출할 수가 있다.

III. 검 정 방 법

1. 二分光法

시계열 $\{X_t\}$가 평균 0의 제3차 定常時系列일 때 평균 $\mu_x = E[X_t] = 0$이고 공분산은 $C_{XX}(m) = E[X(t+m)X(t)]$이다. 그리고 일반 3차 적률 $C_{XXX}(m,n) = E[X(t+m)X(t+n)X(t)]$는 t와 독립적이다. 0이 아닌 모든 m에 대하여 공분산 $C_{xx}(m) = 0$이면 이 시계열은 백색잡음과정이다. 이 시계열이 백색과정이지만 $\{X(t)\}$가 다변량 가우스 과정이 아니면 X(n)과 X(m)은 확률적으로 의존관계를 가질 수 있다. 다변량 가우스性(Gaussianity) 아래에서만 상관성의 결여(백색성)와 확률적 독립성은 동일한 의미를 갖는다.

$\{X(n_1),\cdots,X(n_N)\}$의 분포가 모든 $n_1,\cdots,n_N$에 대하여 다변량 정규이면 이 시계열은 가우스 과정이다. 순수 백색 시계열은 $X(n_1),\cdots,X(n_N)$이 $n_1,\cdots,n_N$의 모든 값에 대하여 독립적 확률변수인 시계열이다. 백색 시계열이 가우스 시계열이 아니면 순수 백색시계열이 되지 못한다. 3차 적률을 무시하고 공분산 함수 $C_{XX}(m)$을 사용하여 순수백색잡음을 검정할 때에는 오류가 발생할 수 있다. 시계열에 비선형성이 존재하면 제3차 적률 $C_{XXX}(m,n)$이 비선형관계에 대한 정보를 제공해주고 있으므로 가우스성과 선형성을 모두 검정해야 순수백색잡음, 즉 독립적이고 동등한 분포를 갖는 확률변수 여부를 밝히게 된다.

시계열의 t 번째 원소가 다음의 형태를 갖는다고 하자.

$$X(t) = \sum_{s=0}^{\infty} h(s)\,\varepsilon(t-s). \tag{1}$$

위에서 $\varepsilon(t)$는 독립적이고 동등하게 분포된 확률변수(random innovation)이고 $E[\varepsilon(t)]=0$ 이다. $\sum_{t=0}^{\infty} h^2(t) < \infty$ 이면 정상적 산출과정 $\{X(t)\}$의 공분산 함수는 유한하다. 투입이 가우스이면 산출도 가우스이고 공분산 함수에 의해 이 과정의 동시분포가 완벽하게 결정된다. 그런데 $\varepsilon(t)$가 정규확률변수가 아니고 $\mu_3 = E[\varepsilon^3(t)] \neq 0$이면 m과 n값 중 많은 값에 대하여 제3차 적률 $C_{XXX}(m,n) \neq 0$이 형성된다. 이와 같은 현상은 $\{X(t)\}$가 Volterra 전개를 만족하는 비선형 필터 작용에 의하여 생성되면 발생한다. 따라서 제3차 적률이 비선형성에 관한 중요한 정보를 제공하므로 이것을 이용하여 시계열이 비선형의 데이타 생성과정에 의하여 생성되고 있는지의 여부를 검정할 수 있다.

Hinich(1982)에 의하면 제3차 적률 $\{C_{XXX}(m,n);\ m < n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ 보다 二分光(bispectrum)을 사용하는 것이 해석에 있어 용이하다고 주장한다. $E[X(t)]=0$인 정상적 시계열에 대하여 이분광은 $|C_{XXX}(m,n)|$이 가산가능(summable) 하면 다음과 같다.

$$B_X(w_1, w_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{XXX}(m,n) \exp[-i(w_1 m + w_2 n)] \tag{2}$$

$B_X(w_1, w_2)$의 대칭성이 주어지면 주정의역(principal domain)은 삼각형의 집합 $\Omega = \{0 \leq w_1 \leq \pi,\ w_2 < w_1,\ 2w_2 + w_1 \leq 2\pi\}$ 이다. 시계열 $\{X(t)\}$가 식 (1)과 같이 선형으로 표현되면 이분광은 다음과 같다.

$$B_x(w_1, w_2) = \mu_3 H(w_1) H(w_2) H^*(w_1 + w_2) \tag{3}$$

위에서 $H(w) = \sum_{t=0}^{\infty} h(t) \exp(-iwt)$이고, H^*는 共軛複素數(complex conjugate)

이다. $\mu_3 = E[\varepsilon^3(t)] \neq 0$이면, $B_X(w_1, w_2) \neq 0$이다.

시계열과정의 표본 { X(0),X(1),⋯,X(N−1) } 의 유한 Fourier변형을 사용하여 이분광의 一致推定量(consistent estimator)을 유도할 수 있다. $w_N = 2\pi n/N$ (n=0, 1, ・・・, N-1) 이라 하자. 정수의 각 쌍 j와 k에 대하여 다음과 같이 정의하자.

$$F(j,k) = N^{-1} X(w_j) X(w_k) X^*(w_{j+k}) \tag{4}$$

위 식에서

$$X(w_j) = \sum_{t=0}^{N-1} X(t) \exp(-\ i w_j t)$$

그런데 $X(w_{j+N}) = X(w_j)$이고 $X(w_{N-j}) = X^*(w_j)$이므로 $F(j, k)$의 주정의역은 $D = \{\ 0 < j \leq N/2,\ 0 < k \leq j,\ 2j + k \leq N\ \}$이다. 이때 N은 짝수이다. $X(0) = 0$으로 놓자. 따라서 $F(j, 0) = F(0, k) = 0$이다. 그리고 $F(j, k)$의 기대값은 다음과 같다.

$$E[F(j,k)] = B_X(w_j . w_k) + O(N^{-1}) \tag{5}$$

따라서 함수 $F(j, k)$는 일치추정량을 얻기 위하여는 平滑해야 한다. 즉 평균을 구해야 한다. $M = N^C$, $(\frac{1}{2} < C < 1)$라 하자. 즉, 정의역 D안에

$$L = \{\ (2m-1)M/2,\ (2n-1)M/2;\ m = 1, \cdots, n;\ m \leq N/2M - N/2 + 3/4\ \}$$

에 대하여, 모든 (j, k)가 주정의역내에 존재하면, 중심이 ((2m-1)M/2, (2n-1)M/2) 에 있는 정사각형 M^2개 점으로 $F(j, k)$를 평균하면 이분광의 일치추정량을 얻을 수 있다. 즉

$$\widehat{B_X}(m, n) = M^{-2} \sum_{j=(m-1)}^{mM-1} \sum_{k=(n-1)M}^{mM-1} F(j, k) \tag{6}$$

이 정사각형의 점들 중 일부가 D에 속하지 않으면 이 점들은 평균에서 제거된다. 식(5)에 의하면 $\widehat{B_X}(m,n)$의 기대값은 다음과 같다.

$$F(\widehat{B_X}(m, n)) = B_X[2\pi(2m-1)M/2N, 2\pi(2n-1)M/2n] + O(M/N) \tag{7}$$

그리고 분산은 다음과 같다.

$$VAR[\widehat{B_X}(m, n)] = NM^{-4} Q_{m,n} [S_X(2\pi(2m-1)M/2N) S_X(2\pi(2n-1)M/2N) \times S_X(2\pi(m+n-1)M/N) + O(M/N)] \tag{8}$$

위에서 $Q_{m,n}$은 D안에 있는 정사각형의 (j, k)의 개수와 경계선 상의 개수의 2배의 합계이다. 정사각형의 D안에 있으면 $Q_{m,n} = M^2$이다. S_X는 멱분광(power spectrum)이다.

정수 p를 L안에 (m, n)의 개수라 하자. 이 p는 대략 $N^2/12M^2$이다. 왜도함수는 다음과 같다.

$$\lambda_X(m, n) = S_X^{-1}\left(\frac{2\pi(2m-1)M}{2N}\right) S_X^{-1}\left(\frac{2\pi(2n-1)M}{2N}\right)$$

$$\times S_X^{-1}\left(\frac{2\pi(m+n-1)M}{N}\right) \left| B_X\left(\frac{2\pi(2m-1)M}{2n}, \frac{2\pi(2n-1)M}{2N}\right) \right|^2$$

다음과 같이 정의하자

$$\lambda(m,n) = (2M^2/N)\,\lambda_X(m,n) = (2M^2/N)\Gamma(m,n); \quad (9)$$

$$\delta(m,n) = \widehat{B_X}(m,n)\left[\frac{N}{M^2}\right]^{-\frac{1}{2}}[\,S_X(2\pi(2m-1)M/2N)$$
$$\times S_X(2\pi(2n-1)M/2N)\quad S_X(2\pi(m+n-1)M/N\,]^{-\frac{1}{2}} \quad (10)$$

그러면 $2\,|\,\delta(m.n)\,|^2$은 자유도가 2이고 비 모수가 $\lambda(m,n)$인 χ^2변수이다. 다음과 같이 검정통계량을 정의하자.

$$\mathrm{CHISUM} = 2\sum_{(M,N)\in}\sum_{L}|\,\delta(M,N)\,|^2 \quad (11)$$

통계량 CHISUM은 본 추정치 대신 점근적 분산·공분산 행렬을 갖는 Subba Rao-Gabr(1980) 검정통계량이다. 가우스性의 귀무가설에서 통계량 CHISUM은 자유도가 2인 무심 χ^2 변수(noncentral χ^2 random variable)이다. 이 때 무심모수는 정의역 D에 있는 모든 m, n에 대하여 $\lambda(m,n)$을 합산한 것이다. 시계열 $\{X(t)\}$가 가우스 확률과정이라는 귀무가설 하에서는 왜도함수 $F(m,n)$은 모든 $(m,n)\in D$에 대하여 모두 하나같이 0이다. 따라서 CHISUM은 유심 $\chi^2(2p)$로 점근한다.

다음에는 선형성의 가설을 살펴보자. $2\,|\,\delta(m,n)\,|^2$은 앞에서 이미 제시한 바와 같이 $\chi^2(\lambda(m,n))$이다. D에 있는 모든 사각형에 대하여 선형성의 귀무가설 하에 $\lambda(m,n)=\lambda_0=(2M^2/N)\lambda_x$이다. 따라서 이 χ^2 확률변수의 기대값은 귀무가설하에서는 모든 m 과거에 대하여 동일하다. 즉 시계열이 선형이지만 가우스가 아닐 때 왜도함수는 상수가 된다. 따라서 식 (9)에 의하여 무심모수도 상수가 된다. 귀무가설은 $\lambda(m,n)$이 모두 동일하다는 것으로 귀착된다. 검정통계량은 이 통계량들의 80번째 分位數이다. R를 D안에 있는 사각형들에 대하여 $2\,|\,\delta(m,n)\,|^2$의 표본 분위수간 범위라 하자. $\widehat{\lambda_0}$을 λ_0의 일치 추정량이라

할 때 $\chi_2^2(\widehat{\lambda}_0)$의 분위수간 범위보다 상당히 크거나 작으면 선형성을 기각한다. ζ_1을 제1분위수, ζ_1를 제3분위수라 하면 $\Pr[X_2^2(\lambda_0) < \zeta_1] = \Pr[X_2^2(\lambda_0) > \zeta_3] = 1/4$이다. 선형성에 대한 검정통계량은 정규분포를 형성한다.

Hinich(1982)는 M을 $M \geq \sqrt{N}$으로 계산할 것을 권고하고 있다. 그런데 Ashley 등(1986)은 시뮬레이션을 통하여 M의 값을 12와 17사이에서 정하는 것이 바람직하다는 결과를 제시하고 있다. 왜냐하면 M이 17이상으로 증가함에 따라 검정력이 약화되기 때문이다

2. BDS 검정

Brock, Dechert와 Scheinkman(1987; BDS)는 경제시계열이 카오스에 의하여 생성되고 있는지의 여부를 검정하기 위한 통계량을 제시한 바 있다. BDS방법은 시계열의 비선형성을 검정하기 위한 것이기도 하다. 시계열 데이타에 대한 검정통계량으로 Grassberger와 Procaccia(1983)의 상관적분(correlation integral)을 이론전개의 기본으로 사용하고 있다. 상관적분은 원래는 데이타집합의 쪽거리 차원을 측정하기 위하여 사용되었다. 이 방법은 다른 방법보다 계산이 비교적 용이하다는 장점을 갖고 있다. 카오스의 측정치로 사용하기 위하여는 데이타의 반복형태의 빈도수를 계산하면 된다.

카오스의 궤도는 끌개에 있어 조밀하기 때문에 카오스 끌개는 기간적 점들의 조밀 부분집합(dense subset)이므로 카오스 궤도는 대개 기간를 갖는다. 상관적분은 이와 같은 양태를 측정해준다.

상관적분을 시계열에 적용하면 이 시계열 내에 특정한 양태가 존재하고 있는지의 여부를 검정한다. BDS는 시계열 데이터에서 기대된 것보다 이 양태의 발생 빈도수가 많은지 또는 적은지를 파악하여 시계열이 카오스 과정을 따르고 있는지 따르고 있지 않는지를 검정한다. BDS의 귀무가설은 시계열이 독립적이고 동등하게 분포된 확률과정에 의하여 생성된다는 것이다. 이와 같은 배경하에서

BDS 검정통계량을 살펴보도록 한다.

BDS 검정통계량은 Grassberger와 Procaccia(1983)의 상관적분의 함수이다. 데이타의 m개 과거자료를 다음과 같이 정의하고 데이타 집합내의 데이타 개수를 n이라 하자.

$$X_t^m = (X_t, X_{t-1}, \cdots, X_{t-m+1})$$

이 때 상관적분은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C_{m,n}(\varepsilon) = n^{-2} \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} H(\varepsilon - \| X_s^m - X_t^m \|) \qquad (12)$$

위에서 H는 Heaviside 함수로서 다음과 같다.

$$H(r) = \begin{cases} 1, & (r \geq 0) \\ 0, & (\text{기타}) \end{cases}$$

위에서 $u \in R^m$에 대하여 $\| u \| = \max_i | u^i |$ 이다. m의 값은 매립차원(embedd -ing dimension)이다. 데이타가 n-차원계에 의하여 결정론적으로 생성되면, 즉 매립차원 m에서 $\{ X_t \}$ 의 상관차원은 다음과 같다.6)

$$\alpha_m = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{\log C_{m,n}(\varepsilon)}{\log \varepsilon}$$

데이타가 결정론적일 때 $m \geqq 2n+1$에 대하여 α_m은 일정하고 데이타가 iid 일 때 $\alpha_m = m$이다. 따라서 BDS 검정에 있어 iid 수열을 인식하는 데 탁월한 효용을 갖는다. 상관적분은 데이타 내의 어느 양태의 반복회수를 계산하는 것이 기본

6) $Z_{t+1} = f(Z_t)$ 이고 관찰치가 $X_t = h(Z_t)$ 이면 $m \leq 2n+1$ 에 대하여 다음의 사상, 즉 $J^m(Z) = [h(z), h \cdot f(z), \cdots, h \cdot f^{m-1}(z)]$은 매립이다. 이것은 쪽거리 차원, 상관적분과 리아푸노프 지수와 같은 동태적 성질은 실제 동태과정 $\{ Z_t \}$로 계산하거나 매립 데이타 $\{ X_t^m \}$ 으로 계산하거나 동일하다.

성질이다. 이 성질을 이용한 BDS 검정은 iid 가설 하에서 이루어지는 양태의 기대 빈도수와 실제 빈도수를 비교하여 가설의 정당성 여부를 제시한다. 카오스 계에는 무한히 많은 기간점(periodic point)들이 존재하고, 이 점들의 근방에 있는 각 점은 카오스 궤도에 의하여 무한히 방문된다. 따라서 카오스 데이타에는 양태의 반복이 많다.

데이타가 약의존성을 갖고 있을 때에는 다음이 성립한다.

$$\lim_{n \to \infty} C_{m,n}(\varepsilon) = C(\varepsilon)^m$$

그리고 다음 식은 점근적 정규분포를 형성한다.

$$\sqrt{n}\,[\,C_{m,n}(\varepsilon) - C(\varepsilon)^m\,] \qquad (13)$$

식 (13)의 분산은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} k_n(\varepsilon) &= n^{-3} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} H(\varepsilon \mid X_r - X_s \mid)\, H(\varepsilon - \mid X_s - X_t \mid) \\ &= n^{-1} \sum_{s=1}^{n} [\, n^{-1} \sum_{t=1}^{n} (\varepsilon \mid X_s - X_t \mid)]^2 \end{aligned}$$

위 식의 극한은 다음과 같다.

$$k(\varepsilon) = \lim_{n \to \infty} k_n(\varepsilon) = \int [\, \int H(\varepsilon - \mid x - y \mid) d\mu(x)]^2 \, d\mu(y) \qquad (14)$$

식 (14)의 점근적 분산은 iid 분포라는 귀무가설 하에서는 다음과 같다.

$$\frac{U_m^2}{4} = k^m - C^{2m} + 2 \sum_{i=1}^{m-1} (k^{m-i} C^{2i} - C^{2m}) \qquad (15)$$

위에서 $k=C^2$이면 식 (15)의 분산은 0 이다. 이 때 통계량은 접근적 χ^2 확률 변수이다.
BDS 통계량은 다음과 같다.

$$S_{m,n}(\varepsilon)=\sqrt{n}\ \frac{C_{m,n}(\varepsilon)-C_n(\varepsilon)^m}{\sigma_{m,n}(\varepsilon)}$$

위에서 $\sigma_{m,n}$은 k와 C의 추정식 k_n과 C_n을 갖고 평가된 σ_m이다.

3. 장기 의존성과 자기닮음

앞에서 살펴본 바와 같이 카오스는 장기적 의존성을 갖고 있으며 이 장기적 의존성에 의하여 자기 닮음의 형태를 시간의 흐름에 걸쳐 취한다. 일정한 시간이 지나면 시계열은 이 시계열이 처음 시작할 때의 시초모양을 형성하여 지금까지 이룩해 놓은 형태를 반복한다. 카오스의 자기 닮음의 성질은 시계열 전체를 통하여 시계열의 부분의 성질을 알 수 있고, 시계열의 부분을 통하여 시계열 전체를 알 수 있다. 말하자면 전체가 곧 부분이고 부분이 곧 전체이다. 자기닮음을 추정하는 방법울 살펴보도록 한다.

자기닮음을 측정하는 방법은 Hurst 모수의 추정방법에 의하는 것이 일반적이다. Arby등(1998)은 소파장(wavelet)변환방법에 의하여 Hurst 모수를 추정하고 아울러 자기닮음의 계수를 추정하는 방법을 정치화시키고 있다. 이들의 소론을 간략하게 살펴보도록 한다.

시계열을 $\{X_t\}$라 하면 이 시계열의 자기상관을 $C(\tau)$로 표시할 수 있다. 시계열 $\{X_t\}$가 자기상관이 시차 τ가 클 때 멱승으로 감소하면 장기의존적 시계열이다. 즉 다음이 성립하면 시계열 과정은 장기의존성을 갖는다.

$$C(\tau)\sim\tau^{-\beta}\qquad \tau\to\infty\qquad \beta\in(0,1) \tag{16}$$

장기의존 과정 X을 時間 比例尺(time-scale)으로 조정하여 불변성질을 얻기 위해서는 총량수준을 T라 할 때 평균 또는 총량 이산시간 과정 $X^{(T)}$를 다음에 의하여 얻으면 된다.

$$X^{(T)}(K) = \frac{1}{T}\int_{KT-T}^{KT} X(u)du$$

총량화의 단기 평균 효과는 점근적 의존구조를 변화시키지 않는다. 따라서 $X^{(T)}$는 임의의 T에 대해서 의존성 지표 β를 갖는 장기의존적 변수가 된다. T가 증가함에 따라 $X^{(T)}$의 상관구조 $C^{(T)}(\tau)$는 0 이 아닌 또는 퇴화하지 않는 극한형태 $C(\tau)$를 갖게 되며, 이것은 총량화에 의하여 변하지 않는다. 즉

$$C(0)=1$$

$$C(1)=2^{1-\beta}-1$$

$$C(\tau)=\frac{1}{2}\{(\tau+1)^{2-\beta}-2\tau^{2-\beta}+(\tau-1)^{2-\beta}\},\quad \tau=2,3,\cdots \tag{17}$$

장기의존 과정은 점근적 제2계 자기 닮은 과정이고 추가적으로 식(17)이 만족하면 정확한 제2계 자기 닮은 과정이다. 연속시간 모수 t를 갖는 과정 Y(t)는 임의의 양의 比例尺 要素(scale factor) c에 대하여 재비례척 과정 $c^{-H}Y(ct)$가 Y(t)처럼 분포하면 자기 닮은 모수 H를 갖는 자기닮은 과정이다. 제2차 적률이 존재하고 H가 1/2보다 크면 증분과정 Y(k+1)−Y(k)는 장기의존적 定常過程 X(k)이다. 장기의존적 과정과 자기닮음 과정의 모수들은 $H=1-\beta/2$의 관계를 갖고 있다. 쪽거리 브라운 운동과정(fractional Brownian motion process) 정상적 증분들과 유한의 제2차 적률을 갖는 자기 닮음 가우스 과정이다.

상호의존적 과정이나 자기닮은 과정에 있어서는 각 시차의 자기 공분산은 O(1/T)보다 천천히 0으로 감소해간다. 말하자면 분산에 대하여 다음이 $T\rightarrow\infty$

함에 따라 성립한다.

$$\mathrm{var}(X^{(T)}) \sim T^{-\beta} \tag{18}$$

이 분산을 계산하기 위하여서는 총량화(aggregation)가 요청된다. Arby등(1998)은 $T=2^{j}$로 하는 총량과정을 다음과 같이 계산하는 것이 효율적이라는 점을 증명하고 있다.

$$X^{(2j)}(k) = a_x(j,k) \tag{19}$$

이 때 분산은 다음과 같다.

$$\mathrm{var}\{a_x(j,k)\} \sim 2^{j(1-\beta)} \qquad (\delta \to \infty, \forall k) \tag{20}$$

관찰치의 총량화는 시간 T에 대하여 관찰치의 평균을 구하는 것과 동일하다. 평균을 구하는 방법 중의 하나는 시간받침(time support)이 차수 T인 띠통행(band-pass) 함수로 데이타를 필터하는 것이다. $y^{(T)}$를 띠통행 총량과정이라 하면 다음의 관계가 형성된다.

$$y^{(2j)}(k) = a_x(j,k)$$

$$\mathrm{var}\{d_x(\delta,k)\} \sim 2^{j(1-\beta)} \tag{21}$$

이 때 분산, 즉 $\mathrm{var}(X^{(T)})$를 구하기 위한 방법은 다음과 같다.

$$V(2^{j}) = \frac{1}{K}\sum_{K=1}^{K-1}\{a_x(j,k+1) - a_x(\delta,k)\}^2 \tag{22}$$

$$= \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{k-1}\{\sqrt{2}d_x(j+1,k)\}^2 \tag{23}$$

Arby등은 소파장(wavelet)의 띠통행의 성질에 의하여 정규화된 自乘合은 제2차

적률의 無偏倚 推定量이라는 것을 보이고 있다. 따라서 $1/N_j \sum_{k=1}^{k=\mu_\delta} d_x(j,k)^2$이 분산인 $\mathrm{var}\{d_x(j,\cdot)\}$의 불편의 추정량이다. 여기에서 N_j는 비례척 j에 있어서 이용가능한 계수의 개수이다. 식(16)의 X(t)의 자기상관이 장기적 상관이고 데이타를 소파장으로 표상하면 $E[d_x(j,k)\, d_x(j,k')\sim |k-k'|^{-\beta-2N}$이다. 이 기대값은 단기적인 값이다. 그리고 非相關化의 정도는 N를 증가시킴으로써 통제가 가능하다.

분산 $\mathrm{var}\{d_x(j,\cdot)\}$가 비례척 j의 멱승으로 운동하고 있다. 그리고 소파장 계수들의 제곱의 평균은 이 분산에 대한 편의 없는, 점근적 효율적 추정치이다. 따라서 모수 β는 $\log_2(2^j)$와 $\log_2\{2^j/N_0 \sum k\, d_x(\delta,k)^2\}$을 변수로 하는 회귀식을 통하여 구할 수 있다.

4. 쪽거리 지수

유클리드 기학학을 포함하여 비유클리드 기하학에서 공간의 차원은 정수로 상정하고 이에 근거를 두고 기하학의 이론을 정립하여 왔다. 그러나 카오스 현상이 발견되면서 공간의 차원은 양의 정수에 한정하지 않고 양의 실수로 확대되어 오고 있다. 양의 실수차원을 갖는 공간은 거리공간에서 일반적으로 정립된 노름을 거리로 정의하여 사용하고, 여기에 추가하여 쪽거리를 거리로 정의하여 사용하고 있다. 거리공간의 노름에 의한 거리로서는 복제가 불가능한 사물을 이 쪽거리에 의하여 복제할 수 있게 되었다. 예컨대 나무나 해안선은 거리를 쪽 거리로 정의할 때 비로소 복제가 가능하다. 쪽거리를 갖는 공간은 카오스의 성질을 갖는다. 따라서 어느 시계열의 쪽거리 지수를 구하면 이 시계열이 카오스 과정에 의하여 생성된 것인지의 여부를 판가름할 수 있다. 이 쪽거리를 구하는 방법을 Poggi와 Viano(1998)가 제시하고 있다. 이들의 소론을 간략하게 살펴보자.

시계열 $X=\{X_t\}$를 $X_0=0$인 평균이 0인 가우스 과정이라 하자. X가 정상적 증분들(stationary increments)을 갖고 또한 다음이 성립한다고 하자.

$$E(X_t - X_{t'})^2 = v|t-t'|^{2H}, \qquad |t-t'|<d_0 \tag{24}$$

위에서 $H \in (0,1)$는 모수이다. 이 모수는 표본경로의 굴곡성을 보여주는 모수로 X의 쪽거리 지수이다. 이 쪽거리 지수 H는 장기기억과정의 모수가 아니라 국부적 H ölder지수 (local H ölder exponent)이다.

시계열 $\{X_t\}$에 대하여 $\triangle\tau(k) = X_k - X_{k-\tau}$ 라 하자. 그러면 이 차분시계열의 분산은 다음에 의하여 얻을 수 있다.

$$S_N^2(n) = \frac{1}{[(N-\tau+1)/n]} \sum_{\delta=1}^{[(N-\tau+1)/n]} m_n^2(j); \tag{25}$$

$$m_n(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=\tau+(j-1)n}^{\tau+jn-1} \triangle\tau(k) \tag{26}$$

위의 식(26)은 증분 과정(차분과정)의 평균이고 식(25)는 n시차의 표본에 대한 평균이다. 따라서 증분과 시차를 모두 사용하여 얻게 되는 일종의 분산이다. $\tau=1$이면 $S_N^2(n)$의 기대값은 H의 함수이다. 즉 $E S_N^2(n) = E\, m_n^2(1) = vn^{2H-2}$이다. 따라서 N_s $(s=1,\cdot\cdot\cdot,\ell)$값을 사용하여 $S_N^2(n)$를 얻고 $\log n_s(s=1,\cdot\cdot\cdot,\ell)$과 $S_N^2(n)$을 회귀식에 의하여 추정하면 H를 구할 수 있다. $\tau>1$일 때, 쪽거리 브라운 운동과정이라는 가정 아래에서 $E S_N^2(n)$을 얻을 수 있고 이를 통하여 쪽거리 지수를 구할 수 있다.

다음과 같이 가설을 설정하자.

H_1 : 시간 이산적 증분과정 $\{\triangle_1(k) = x_K - x_{K-1}\}_{K\geq 1}$이 선형이다.

H_2 : 시간이산적 증분과정 $\{\triangle_1(k) \mid k\geq 1$ 이 $L^2([-\pi,\pi]\}$에서 分光密度를 갖는다.

H_3 : X_t가 쪽거리 브라운 운동과정이다. 즉 $X_0=0$이고 다음이 성립하는

평균 0의 가우스 과정이다.

$$E|X_t - X_{t'}|^2 = v|t-t'|^{2H}, \quad \forall (t, t')$$

위에서 v는 진폭 상수이고 $H \in [\,0\,,\,1\,]$은 모수이다.

위의 가설 아래에서는 다음의 결과를 얻는다.

(i) $\tau=1$이면 $Em_n^2(\delta)=vn^{2H-2}$ $(n<d_0)$

(ii) $\tau>1$이면, 쪽거리 브라운운동 H_2아래에서는 $n \to \infty$ 함에 따라 $Em_n^2(\delta) \sim vn^{2H-2}\tau^2$이다.

(iii) 가설 H_1아래에서 $N \to \infty$에 대하여 $S_N^2(n) \to Em_n^2(j)$ a.s이다.

(iv) 가설 H_2 아래서, $\operatorname{var} S_N^2(n) = O(1/N)$.

전술한 바와 같이 모수 H의 추정치 $\hat{H}$는 $\{Sn_s^2(N)\,,\ s=1,\cdots\ell\}$과 $\{\log n_s\}$을 회귀식으로 구한다. 이 추정치 $\hat{H}$는 다음의 성질을 갖는다.

$$\hat{H}_N \xrightarrow{a.s} H$$

$$\sqrt{N}(\hat{H}_N - H) \xrightarrow{D} NO(0, v^2)$$

위에서 NO는 정규분포를 의미하며 $\sigma^2 = VF^tV/L$이다. 여기에서 V는 벡터, F는 행렬, 그리고 L은 스칼라로 다음과 같다.

$$V = \left(\frac{\ell \log n_s - \sum_{1 \le s \le \ell} \log n_s}{n_s^{2H-2}}, s=1,\cdots,\ell \right);$$

$$L = 4\left\{ \ell \sum_{1 \le s \le \ell} \log^2 n_s - \left(\sum_{1 \le s \le \ell} \log n_s \right)^2 \right\} ;$$

$$F(s,s') = 2D(s,s') \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Phi^2_{s,s'}(jD) ;$$

$$\Phi_{s,s'}(j) = \mathrm{cov}(m_{n_s}(t), m_{n_{s'}}(t')) ;$$

$$t_{n_s} - t'_{n_{s'}} = j ;$$

$D = n_s$와 $n_{s'}$를 나눈 가장 큰 정수.

따라서 모수 H의 추정치는 분포에 있어서 H로 수렴한다. 이로 인하여 점근적 분산의 추정이 가능하며 점근적 분산은 σ^2이다. $\hat{H}$는 점근적 정규분포를 따른다. 정규분포에 의하여 H의 추정치에 대한 검정이 가능하다.

5. 리아푸노프 지수

미분방정식이나 정차방정식은 초기조건이 주어질 때 一般解가 아니라 구체적 함수로 표현되는 特定解를 구할 수 있다. 그런데 이 解는 일반적으로 초기조건에 민감한 편이 아니다. 그러나 카오스는 미분방정식으로 표현되는 것이 보편적인데, 카오스를 표상하는 미분방정식은 두 개의 초기조건 간에 극미한 차이가 발생하여도 일정 기간이 흐른 후에는 이 두 표본경로가 동일한 미분방정식에 의하여 출발한 것이라고 보기가 불가능할 정도로 완전히 다르다. 말하자면 완전히 다른 표본경로를 형성한다. 리아푸노프 지수는 초기조건의 민감성을 검정하는 방법이다.

시계열 $\{ X_t \}$가 다음의 비선형 자기 회귀 모형으로 표현된다고 하자.

$$X_t = AX_{t-1} + \sigma\varepsilon_t \tag{27}$$

위에서 A는 d×d행렬로 선형의 자기회귀모형의 계수이며 最上行은 $[a_1, a_2, \dots, a_d]$ 이고 대각선상은 1이며 그 이외에는 0이다. 식(27)의 특성다항식은 다음과 같다.

$$p(\gamma) = \det(\gamma I - A) = \gamma^d - \sum_{k=1}^{d} a_k \gamma^{d-k} \tag{28}$$

위에서 복소수근 $\{\gamma_i\}_{i=1}^{d}$ 는 A의 고유값이다. 고유값 γ_i에 대등되는 고유벡터를 v_i라 하면 식(27)의 解는 $X_t = A_t X_0 = \sum a_i \gamma_i^t v_i$이다. 따라서 $t \to \infty$함에 따라 다음이 성립한다.

$$\| X_t \|^{1/t} = \| A^t A_0 \|^{1/t} \to \max\{|\gamma_i| : a_i \neq 0\} \tag{29}$$

식(29)의 리아푸노프지수는 $\lambda_i = \log(\gamma_i)$이며 식(29)에 의하여 $t \to \infty$함에 따라 다음과 같다.

$$\frac{1}{t} \log \| X_t \| = \frac{1}{t} \log \| A^t X_0 \| \to \max\{\lambda_i : a_i \neq 0\}$$

위에서 λ_i중 가장 큰 값을 λ_1이라 하자. $\lambda_1 > 0$이면 식(28)의 根에 대응되는 λ_1이 복소수 단위원의 외부에 존재하며 식(27)은 지수적으로 발산한다. 그러나 $\lambda_1 < 0$이면 모든 근이 단위원 내에 존재하므로 解는 0 에 지수적으로 수렴한다.

결정론적 카오스系 있어서 두 개의 유사한 상태백터에서 출발한 이 系의 궤적들은 이 두 궤적의 유사성이 사라질 때까지 지수적으로 발산한다. 따라서 카오스 동태의 주요성질 중의 하나인 초기조건에 대한 민감한 의존성(sensitive dependence)을 검정하는 타당한 방법이 리아푸노프 지수인 것이다. λ_1이 음수이면 근처에 있는 궤적들이 발산하지 않고 수렴한다. 그런데 $\lambda_1 > 0$일 때에도 이것 역시 초기조건에 대한 민감한 의존성을 의미하며, 이때에는 카오스 성질보다는 이 系의 예측불가능성이 非線型性으로부터 기인하고 있다는 것을 의미한다.

$J_t = DF(X_t)$를 X_t에 있어서의 F의 Jacobi행렬이라 하자. 리아푸노프 지수는 Jacobi 방법에 의하여 구한다. $DF(X_t)$를 계산하기 위하여 다음의 식을 사용한다.

$$X_{s+1} - X_{t-1} = F(X_s) - F(X_t) \approx DF(X_t)(X_S - X_t) \qquad (30)$$

위에서 X_s를 충분히 정확하게 구하면 $X_{t-1} - X_{t+1} = A_t(X_s - X_t)$이므로 회귀식에 의하여 λ를 구할 수 있다. 적절한 정규성의 가정을 부가하면 Jacobi 행렬 $\{\hat{J}_t\}$에 의하여도 리아푸노프 지수를 구할 수 있다. 최대고유값 λ_1을 λ로 정의하자. M을 구획길이(block length)라 하자. 이것은 λ를 계산하는 데 사용되는 행렬 $\hat{J}_t$ 의 개수이다. $T_M = J_{M-1} J_{M-2,} \dots J_0$ 이라 하고 $\lambda_M = (1/M) \log \| T_M \|$, $\gamma_M = \| T_M \|^{1/M}$로 정의하자. 그러면 $\lambda = \lim_{M \to \infty} \lambda_M$이다. 따라서 $\hat{J}$들을 사용하여 얻은 추정치를 $\hat{T}_M$과 $\hat{\gamma}_M$이라 하자. 그러면 $\hat{\lambda}_M = \log(\hat{\gamma}_M)$이 표본수 N과 구획길이 M을 사용하여 얻는 λ의 Jacobi 추정치이다.

Jacobi 행렬을 구하는데 여러 가지 방법이 있는데, McCaffrey 등(1992)은 尖細薄板雲形(thin-plate spline) 방법과 신경망 회귀방법이 탁월하다는 것을 증명한 바 있다. 이 논문에서는 첨세박판운형 방법에 의하여 리아푸노프 지수를 추정한다.

Ⅳ. 실 증 분 석

1. 데이타

이 논문에서는 우리나라의 종합주가지수의 수익률을 사용한다. 기간은 1980년 시초부터 1996년말이다. 일별 종합주가 수익률과 주별종합주가 수익률을 사용한다.

일별수익률과 주별수익률의 기술통계량을 <표 1>에 제시한다. <표 1>에서 볼

<표 1>記述統計量[7)]

	평균	표준편차	첨도	왜도	최대	최소	정규분포성
일 별	0.0005	0.0115	1.4759	2.566	0.0745	-0.0834	1.795
주 별	0.003	0.030	4.287	0.589	0.218	-0.134	1.743

수 있는 바와 같이, 일평균 수익률이 0.0005이고 주평균수익률이 0.003이다. 표준편차는 일수익률이 1.2%이고 주수익률이 3.0%이다. 주별수익률의 경우 평균이 0에 접근해 있고, 표준편차가 3%라는 현상은 주별단위로 포트폴리오를 형성하고 개정하는 전략을 취하면 오히려 이익을 거두기는 커녕 손해를 감수해야 할 가능성이 높다는 것을 보여주고 있다.

일별수익률과 주별수익률이 Kolmogorov-Smirnov의 정규분포 적합성검정(goodness of fit test)에 의하여 정규분포를 따른다는 가설은 수용하기가 어렵다. 검정통계량이 임계치보다 크기 때문이다. 일별수익률의 경우 첨도가 1.5로 3에 비하여 상당히 낮다. 반면 주별수익률에 있어 첨도(kurtosis)가 4.29로 3보다 상당히 높다. 일별수익률의 경우 정규성에 대한 첨도의 표준오차는 $\sqrt{24/4980} = 0.069$인 바, 이 통계량은 1.5(= $|1.5-3|$) 보다 상당히 낮다. 주별수익률에 있어 정규분포성의 귀무가설 아래에서의 첨도의 표준오차는 $\sqrt{24/883} = 0.16$이다. 이 수치는 1.29(= 4.29-3) 보다 상당히 낮다. 분포의 비대칭성을 보여주는 왜도는 일별수익률이 2.6이고 월별수익률이 약 0.6이다. 우측으로 기울어 졌다. 확률변수가 정규분포를 따른다는 귀무가설 하에서 왜도의 표준오차는 일별수익률에 있어서는 $\sqrt{6/4980} = 0.035$이고, 주별수익률의 경우 $\sqrt{6/883} = 0.08$이다. 이 통계량

7) Kolmogorov-Smirnov 검정의 통계량은 표본수를 n이라 할 때 다음과 같다.

유의수준	.01	.05	.10
통계량	$1.63/\sqrt{n}$	$1.36/\sqrt{n}$	$1.22/\sqrt{n}$

<표 2> 時系列相關

시차	일 별 수 익 률		주 별 수 익 률	
	상 관 계 수	통 계 량	상 관 계 수	통 계 량
1	.1125	63.0363	-.0346	1.0580
2	-.0343	68.8911	.0625	4.5019
3	.0218	71.2675	.0668	8.4494
4	.0111	71.8827	-.0171	8.7083
5	.0089	72.2762	-.0443	10.4475
6	-.0138	73.2185	.0492	12.5943
7	-.0250	76.3390	-.0051	12.6169
8	-.0352	82.5240	.0698	16.9467
9	.0141	83.5129	-.0241	17.4625
10	.0068	83.7406	.0468	19.4161
11	.0269	87.3381	-.0467	21.3608
12	.0085	87.6939	-.0034	21.3713
13	.0269	91.2941	-.0094	21.4498
14	.0286	95.3687	.0023	21.4547
15	.0290	99.5531	-.0009	21.4554
20	-.0066	106.4487	.0285	25.6930
25	-.0405	117.2574	-.0140	31.3068
30	-.0306	123.9294	-.0055	39.1885
35	.0016	131.8483	.0150	41.1831
40	.0251	138.5882	.0236	48.8416
45	.0023	139.9652	.0104	50.8216
50	.0183	147.2136	-.0029	54.7620
60	.0043	165.9920	.0509	63.3999
70	-.0003	173.9862	.0165	73.3928

은 0.6과 2.6에 비하여 상당히 낮다. 첨도와 왜도가 정규분포에서 벗어나 있고 Kolmogorov-Smirnov 검정이 정규분포성을 지지하고 있지 않고 있어 주가가 정규분포를 형성하고 있다고는 보기 어려운 실정이다.

<표 2>는 일별수익률과 주별수익률의 시계열상관이다. 이 표의 통계량은 Box-Ljung 검정통계량이다. 이 통계량에 의하면 주별수익률의 자기상관의 귀무가설을 기각하는데 실패하고 있다. 주별수익률은 자기상관이 상당히 작다. 시차

70에 이르기까지 거의 전기간에 걸쳐 자기상관의 양에 큰 변화가 없으며, 모든 자기상관이 0에 접근하고 있다. 이것은 제1계 자기상관과 제2계 자기상관이 이보다 큰 시차의 자기상관과 유사하여 별차이가 없기 때문이다. 일반적으로 시계열 상관이 존재하면 제1계 또는 제1계나 제2계의 자기상관이 높고 그 이후에는 급격히 감소하다가 0에 접근하게 마련이다. 그런데 주별수익률 시계열과 일별수익률 시계열에서는 다같이 제1계 및 제2계가 상당히 낮아 0에 접근하고 있다. <표 2>가 제시하고 있는 바와 같이 시계열 상관이 존재하고 있지 않는다는 결론을 내릴 수 있다. 그러나 일별수익률의 경우 자기상관이 존재하고 있음을 알 수 있다.

일별수익률은 제1계 자기상관이 양이고 제2계 자기상관이 음이다. 그러나 주별수익률의 경우 제1계 자기상관은 음이고 제2계 자기상관은 양이다. 제1계 자기상관은 일별수익률이 주별수익률보다 절대값에 있어서 크다. Fama(1976)와 Taylor (1986)는 미국의 주식수익률 시계열이 제1계 자기상관이 양수이고 매우 작다는 실증적 결과를 발견하였다. 제1계 자기상관이 양이고 작다는 것은 주식 시계열이 매우 짧은 기간이지만 기억을 갖고 있으며, 따라서 주식수익률 중 예측할 수 있는 부분이 있다는 점을 의미한다. 제2계 자기상관이 음이라는 것은 평균회귀의 성향을 의미한다. 자기상관이 제1계의 양(음)에서 제2계의 음(양)으로 변하고 있으므로 평균회귀의 성향이 존재하고 있다고 할 수 있다. 그러나 이와 같은 경제적 해석은 주별수익률의 경우 귀무가설의 기각에 실패하고 있으므로 완벽하게 적용된다고는 할 수 없는 것이다.

주식수익률의 시계열들의 자기상관이 0에 근접해 있는데, 이것은 효율적 시장가설이 성립하는 증거로 볼 수도 있다. 반면에 이 시계열들이 비선형의 데이타 생성과정에 의하여 발생된 표본들로 해석해 볼 수도 있을 것이다. 상관함수는 두 변수들 간의 관계가 일차식, 즉 선형관계라는 전제 하에서 파악되는 통계량이다. 두 변수 간의 관계가 비선형적일 때에는 이 두 관계에서 추정되는 상관계수는 의사상관계수(spurious correlation coefficient)이다. 의사상관관계에서는 선형성에 대한 추론은 무의미한 것이다.

2. 검정과 해석

정규성 또는 가우스性과 선형성을 검정하기 위한 二分光法에 의한 검정통계량 또는 Hinich 검정통계량을 제시하면 <표 3>과 같다. 정규성에 관한 검정통계량은 일별수익률의 경우 1.58E-5이고 주별 수익률에 있어서는 1.15E-5이다. 귀무가설은 수익률이 정규분포에 의하여 생성된다는 것이다.

<표 3> 二分光 檢定

	가우스性	線形性
일 별	1.58E-5	3.21E-11
주 별	1.15E-5	8.95E-9

Hinich 검정통계량은 정규성 또는 가우스性의 귀무가설 아래에서는 표준정규확률변수이다. 일방 검정(one-sided test)을 수행하며 이 통계량의 값이 크면 가우스性을 기각하게 된다. 말하자면 검정통계량의 값이 2.0 또는 3.0을 초과하면 가우스性이라는 귀무가설을 기각한다. 일별 수익률과 주별 수익률의 Hinich 검정통계량은 거의 0 에 접근한 수치이다. 따라서 일별주식수익률과 주별주식수익률이 가우스 분포에 의하여 생성된다는 가설은 기각에 실패하고 있다. 이 점은 李逸均(1989)이 일별, 주별 및 월별 수익률이 정규분포에 따르고 있다는 실증결과와 부합하고 있다.

일별 및 주별 수익률의 線形性에 대한 Hinich 검정통계량은 <표 3>에 의하면 3.21E-11과 8.95E-9이다. 거의 0에 가깝다. 귀무가설은 수익률의 선형성이다. 이 귀무가설 아래에서는 Hinich 검정통계량은 정규분포를 따르며 일방검정의 경우 이 통계량의 값이 크면 선형성은 기각하게 된다. 즉 일반적인 경우 통계량이 2.0 또는 3.0을 상회하면 귀무가설은 기각된다. 따라서 선형성의 귀무가설은 기각에 실패하고 있다.

<표 4 > BDS 통계량

	ε=0.5	
M	일별	주별
2	8.4662E-4 (2.3482E-4)	5.0449E-3 (1.9934E-3)
3	1.7262E-3 (5.2482E-4)	9.6502E-3 (4.4453E-3)
4	2.6274E-3 (8.7775E-4)	1.3970E-2 (7.4185E-3)
5	3.5104E-3 (1.2843E-3)	1.8006E-2 (1.0830E-2)
6	4.3696E-3 (1.7380E-3)	2.1759E-2 (1.4625E-2)
7	5.2106E-3 (2.2345E-3)	2.5308E-2 (1.8762E-2)
8	6.1817E-3 (2.7702E-3)	2.8577E-2 (2.3209E-2)
9	7.2718E-3 (3.3423E-3)	3.1569E-2 (2.7941E-2)
10	8.3383E-3 (3.9486E-3)	3.4205E-2 (3.2937E-2)

* 괄호는 표준오차의 표시임

카오스의 기본성질 중의 하나는 非線型性이다. 그런데 주가가 비선형성을 형성하고 있지 못하고 선형성을 유지하고 있다는 것이 Hinich가 제시한 검정방법에 의하여 입증되고 있다. 이 검정에 의하면 주가는 카오스 동태성을 구비하고 있지 못한 실정이다. 이 점을 좀더 살펴 보기 위해 BDS 검정통계량을 구하였다.

시계열 데이타가 카오스의 성질을 갖기 위하여서는 이 시계열이 독립적이고 동등한 분포(iid)를 형성해서는 안된다. BDS 검정통계량은 시계열이 iid인가 아닌가를 검정하는 통계량이다. 이 BDS통계량은 극한 정규분포를 따른다. 따라서 통상적인 검정은 통계량이 2.0이나 3.0을 상회하면 iid의 귀무가설을 기각하게 된다. BDS의 검정통계량을 <표-4>에 제시한다.

이 표에 의하면 일별 종합주가 수익률과 주별 종합주가 수익률의 BDS검정통계량은 0에 접근해 있다. 따라서 이 시계열들이 iid에 의하여 생성된다는 귀무가설을 기각하는데 실패하고 있다. 이 표에서 m은 매립차원이고 ε은 거리한계이다. ε은 상관함수를 계산하는데 사용되는 관찰치들의 쌍들간의 최대차이이다.

Grassberger-Procaccia 검정에 있어서 ε과 m은 자유로이 주어지는 것이 아니다. 왜냐하면 상관차원을 정의하는데 이 두 변수의 극한을 취하기 때문이다. 상관차원의 정의에 있어서 ε이 0으로 접근하고 m이 무한으로 접근할 때 극한이 취해진다. 반면 BDS검정에서는 상관차원을 사용하는 대신 상관함수를 사용하고 있으므로 이 두 변수의 값은 상관함수의 정의에서 유한의 값을 취한다. BDS검정통계량을 계산함에 있어서 m은 2-10까지의 정수를 취하였다. ε의 값은 0.5일 때 <표-4>에 제시된 값이 계산되었으며 그 이외의 값에 대하여는 계산이 되지 않거나 계산된 값이 불안정하였다. 이것은 각 ε의 값에 대하여 BDS검정통계량이 0에 접근하고 있는 것으로 생각할 수 있다. 따라서 일별수익률과 주별수익률이 iid, 즉 白色性(whiteness)에 의하여 생성되고 있음을 뜻한다. 이것은 이 시계열들이 카오스 동태성에 의하여 생성되고 있다고 보기는 힘들다는 것을 의미한다.

Hinich 二次元檢定은 빈도영역(frequency domain)에 있어서의 비선형성에 대한 검정이다. BDS검정은 白色性에 대한 검정이다. 이 두 검정에 의하여 일별종합주가지수와 주별종합주가지수는 iid확률변수이며 정규분포 또는 가우스분포에 의하여 생성되고 있음이 밝혀졌다. 뿐만아니라 이 두 시계열이 선형성을 갖고 있으며 비선형성을 갖고 있지 않고 카오스 성질도 존재하고 있지 않다는 것이 발견되었다.

일별종합주가지수 시계열의 쪽거리지수에 대한 검정통계량을 제시하면 <표 5>와 같다. 시계열의 차분에 대한 시차 모수 τ를 1로부터 16까지 취하였다. 각 시차모수에 의하여 산출된 시계열의 차분값들의 평균을 계산하기 위한 n은 n= 10s (s=5, ⋯ , 25)로 정하여 쪽거리지수를 추정하였다. $\tau = 1$ 일 때 추정치가

<표 5 > 쪽거리 지수(일별)

τ	1	2	3	4	5	6	7	8
지수	-1.9887	-2.0219	-1.8213	-2.0868	-2.0685	-1.8882	-1.9825	-2.0771
τ	9	10	11	12	13	14	15	16
지수	-2.1579	-2.0511	-2.0860	-1.9964	-2.0558	-1.9417	-1.9668	-1.9674

가장 신뢰성을 갖는다. τ가 증가함에 따라 $\hat{H}_N$이 H를 과대 추정할 가능성이 존재하기 때문이다. 쪽거리 브라운 운동과정은 평균이 0인 연속시간 가우스 過程族에 속하고 이 과정은 가설 H_1을 만족한다. H<3/4인 쪽거리 브라운 운동과정은 H_2를 만족한다.

<표 5>에 의하면 $\tau = 1$일 때 쪽거리지수의 측청치 $\hat{H}_N$이 -1.9887이다. 이 값은 -2라고 할 수 있다. 모든 $\tau \in [1, 16]$의 값에 대하여 $\hat{H}_N$의 값은 -2이다. 이 값은 H가 0과 1사이에 존재해야 쪽거리지수가 된다는 것을 충족시키지 못하고 있다. 따라서 일별종합지수가 카오스 과정에 의하여 생성된다는 점이 정당화되지 못하고 있다. 뿐만 아니라 이 H가 정수 -2이다. H가 정수이면 쪽거리가 아니다. 또한 일별종합주가지수가 쪽거리 브라운 운동과정을 따르고 있지 않고 있음을 알 수 있다.[8)]

주별종합주가지수에 대한 쪽거리를 제시하면 <표 6>과 같다. $\tau = 1$일 때 쪽

---

8) 李逸均(1988)은 일별종합주가지수가 일반 기하브라운 운동과정에 의하여 생성되고 있다는 것을 실증분석을 통하여 제시하고 있다. H가 0이면 시계열은 표준 브라운과정을 따른다. 브라운 운동과정은 다음과 같다.

$$W_k(\tau) = \frac{1}{\Gamma(k + \frac{1}{2})} \int_{\tau}^{0} (\tau - x)^{k-2} dW(x)$$

이식에서 k = 1/2 이면, $W_k(\tau)$는 표준 브라운 운동으로 귀착된다. $W_k = dW(x)$ 관계가 성립하며 표준 브라운운동으로 귀착된다. $k \in (\frac{1}{2}, 1)$ $(H \in (0, \frac{1}{2}))$이면 양(음)의 장기의존관계가 존재하고 분산은 n보다 빨리(천천히) 증가한다. 때문에 빈도 0에서 분광밀도는 무한 (0)이 된다.

<표 6 > 쪽거리 지수

τ	1	2	3	4	5	6	7	8
지수	-2.5636	-2.4638	-2.2615	-2.7443	-2.1967	-2.7477	-2.9374	-2.1364
τ	9	10	11	12	13	14	15	16
지수	-1.9431	-2.1220	-2.2984	-2.3544	-2.7061	-3.0059	-3.1053	-2.6485

거리 지수는 -2.56이다. 그러나 지수는 τ의 값에 따라 상당한 변화를 보이고 있다. $\tau = 9$일 때 -1.94로 가장 크고 $\tau = 15$일 때 -3.11로 가장 작다. 역시 카오스 쪽거리라고 판단하기는 어려운 실정이다.

자기 닮음 과정에 대한 추정치는 일별종합주가지수에 있어서 $\hat{\beta}$가 61.71이고 $\hat{H}$는 -29.85이다. 그리고 주별지수에 있어서는 $\hat{\beta}$가 59.28이고 $\hat{H}$는 -28.64이다. $\beta \in (0, 1)$일 때 시계열이 장기적 의존관계를 형성하며 자자 닮음 과정을 갖는다. $\beta \in (1, 2)$일 때에는 相關合은 유한이고 이 과정은 장기의존적이 아니라 단기의존적이다.

β와 H의 추정치가 이 범위를 벗어나고 있다. 따라서 주가시계열이 자기 닮음 과정에 의하여 생성된다는 가설은 기각이 된다. $H>0$이고 $\beta \in (0, 1)$에 대하여 $H = 1-\beta/2$의 관계가 형성되면 시계열은 쪽거리 브라운 운동과정의 성질은 갖는다. 이 과정은 定常的 增分値들과 유한의 제2차적률을 갖는, 유일한 자기닮은 가우스 과정이다. 이 과정에서는 제2계 정상성이 유지된다. 그러나 $\beta \in (-1, 0)$이면 제2계 정상성이 유지되지 않을 가능성이 크다. 그러나 정상적 증분치를 갖는 자기 닮음 과정을 사용하여 모형을 정립할 수 있으며 이 때에는 쪽거리 브라운 운동과정을 이용하는 것이 바람직하다. 그러나 β와 H의 추정치가 이 값을 갖고 있지 않고 있어 주가시계열이 쪽거리 브라운 운동과정에 의하여 생성되고 있지 않다는 증거를 얻게 되었다.

비선형성이 카오스에서는 관건을 형성한다. 주가시계열에서 선형성을 제거하기 위하여 자귀회귀모형을 1차적으로 사용하였다. AR(2)에 의하여 먼저 선형성을 제거하였다.

시간의 흐름에 걸쳐 전개되는 시계열 과정의 운동이 초기조건에 민감하게 의존하여 진행되고 있다는 초기조건의 민감성이 카오스의 가장 중요한 특성중의 하나이다. 이 민감성은 리아푸노프 지수에 의하여 검정하게 되는데, 이 지수의 추정치 $\hat{\lambda}$는 일별종합주가지수의 경우 -1.95이고 주별종합주가지수의 경우 -2.13이다. $\lambda>0$이면 이 시계열 과정은 초기조건에 민감하게 반응하여 일정기간이 경과한 후에는 초기조건의 미세한 차이를 갖고 출발하여도 표본경로가 완벽하게 달라 이질적 형상을 갖는 운동형태를 보인다. 즉 $\lambda>0$인 시계열과정은 카오스과정이다. 그런데 일별 및 주별종합주가지수의 리아푸노프 지수의 추정치는 음수이다. 즉 $\lambda<0$이다. 따라서 종합주가지수는 카오스적 성질을 구비하고 있지 않다.

이 장에서는 BDS방법을 비롯하여 여러 방법을 사용하여 카오스의 성질들을 검정하였다. 주가시계열의 iid의 기각을 통한 카오스성, 가우스性, 선형성의 부정을 통한 카오스 동태적 非線型, 초기조건에 대한 민감도 또는 거의 정확하게 유사한 초기조건을 갖는 궤적들의 지수적 발산, 자기닮음, 쪽거리지수, 리아푸노프 지수 등을 검정하였으나 모두 기각되었다. 따라서 주가가 카오스과정을 따르고 있지 않는다는 것을 발견하였다. 그런데 李逸均(1995, 1996)은 주가가 비선형을 갖고 있으며 장기기억을 갖고 있다는 근거를 실증분석을 통하여 제시하고 있다. 이 발견들을 인정한다면, 주가는 카오스의 동태에 의하여 생성되는 비선형성이 아니라 장기기억과 지속성에 의하여 형성되는 비선형성에 의하여 지배를 받고 있다고 할 것이다. 경제에 가해진 충격이 사라지지 않고 장기적으로 존속하여 영향을 미치고 이와 같은 충격이 축적되며 이 축적에 의한 모든 충격들이 복합적으로 작용할 때 이 장기기억은 시계열 내부에 비선형성을 형성시킬 것이다.[9] 이 점을 다음 장에서 천착해 보고자 한다.

9) 영속적 충격들이 동일한 양으로 음수와 양수를 갖게 되는 경우 총량화할 때 소멸되어 충격들의 모든 영향의 합은 0이 될 것이다. 그러나 이와 같은 현상은 존재하는 경우가 극히 희귀할 것이다.

V. 비 선 형 성

1. 검정방법

가. Volterra 展開와 非線型의 檢定

Tsay (1986)는 시계열의 선형성검정방법을 Volterra 전개에 의하여 정립하였는바, 다음과 같은 절차에 의하여 시계열의 비선형성을 검정하는 것이 바람직하다는 결론을 제시하고 있다. 즉,

(1) y_t를 종속변수로, $\{1, y_{t-1}, \cdots, y_{t-m}\}$을 독립변수로하여 회귀자승법에 의하여 계수를 추정하고 $t = m+1, \cdots, T$에 대한 잔차 $\{\hat{e}_t\}$을 얻는다. 이 회귀모형은 다음과 같이 표시하도록 한다.

$$y_t = \pi' z_t + e_t. \tag{31}$$

위에서 $z_t = \{1, y_{t-1}, \cdots y_{t-m}\}$이고 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_m)'$이다. 이때 m은 연구자가 미리 정한 수이고, T는 표본의 크기이다.

(2) $\{1, y_{t-1}, \cdots, y_{t-m}\}$을 독립변수로, 다음에 정의되는 ζ_t를 종속변수로 하는 회귀모형을 정립한 후, $t = m+1, \cdots, T$에 대한 잔차 벡터 $\{x_t\}$를 얻도록 한다. 이 경우 회귀모형을 다변량 회귀모형으로 다음의 형태를 갖는다.

$$\zeta_t = \eta' z_t + x_t. \tag{32}$$

위에서 종속변수로 사용되고 있는 ζ_t는 $M = (1/2)m(m+1)$ 차원의 벡터이다. 그리고 $\zeta_t = \mathrm{vech}(u_t^T u_t)$이며, $u_t = (y_{t-1}, \cdots, y_{t-m})$이다. vech는 half stacking vector이다.[10)]

10) vech, 즉 half stacking vector는 각 열(column)의 주대각선 위에 있는 元과 주대각선 아래에 있는 元으로 구성되는 column stacking operator이다.

(3) 잔차 $\hat{x}_t$를 독립변수로, 잔차 $\hat{e}_t$를 종속변수로 하는 회귀모형을 정립하고 회귀의 평균자승과 오차의 평균자승의 F 비율을 $\hat{F}$로 한다. 즉, 회귀모형은 다음과 같다.

$$\hat{e} = \beta'\hat{x}_t + \varepsilon_t \qquad t=1, m+1, \cdots, T \tag{33}$$

그리고 $\hat{F}$를 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{F} = \{(\textstyle\sum\hat{x}_t\hat{e}_t)(\sum\hat{x}_t^T\hat{x}_t)^{-1}(\sum\hat{x}_t^T\hat{e}_t)/M)\}/\{\sum\hat{\varepsilon}_t^2/T-m-M-1)\}. \tag{34}$$

위 식 (34)에서 t는 m+1으로부터 T까지로 이에 대하여 합산토록 한다. $\hat{\varepsilon}_t$는 식 (33)의 회귀잔차값이다.

y_t가 다음의 모형을 만족시키는, 차수 m의 정상적 자기회귀과정이라 하자.

$$(y_t-\mu) = \sum_{t=1}^{m}\pi_i(y_{t-1}-\mu) + e_t$$

위에서 e_t가 iid 확률변수들로서 평균이 0이고 분산이 σ_e^2이며 4차적률이 유한하다. T가 큰 경우 식 (34)로 정의된 통계량 $\hat{F}$는 근사적치적으로 F 분포를 따른다. 이때 F 확률변수의 자유도는 ((1/2)m(m+1), T-(1/2)m(m+3)-1) 이다.

나. ARCH LM 검정법

Engle (1982)이 정립한 ARCH 모형은 변동성이 높은 시기와 변동성이 낮은 시기가 교대하는 시계열을 해명하기 위한 모형이다. 이 모형에서는 시계열의 변동폭이 크게 발생하면 다음 期에도 뒤따라 큰 변동폭이 발생하며, 어느 期에 변동이 작으면 다음 期에도 변동이 작게 이루어진다. 이 모형은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y_t = z_t'\beta + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim N(0,\ h_t)$$

$$h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p\varepsilon_{t-p}^2$$

귀무가설은 $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$이다.

절차는 다음과 같다.

(1) $y_t = z_t'\theta + e_t$를 선형회귀식 추정방법에 의하여 추정하고 $\hat{e}_t$를 저장해 둔다.

(2) 잔차의 제곱 $\hat{e}_t^2$을 절편과 $\hat{e}_t^2$의 p 시차값에 대하여 회귀한다.

$$\hat{e}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\hat{e}_t^2 + \cdots + \alpha_p e_{t-p}^2 + \varepsilon_t$$

(3) 두 번째의 회귀에의 R^2를 구하고 TR^2 통계량을 사용하여 귀무가설을 검정한다.

귀무가설은 ARCH 의존성이 없다는 것이며 이 귀무가설하에서 ARCH LM 검정은 $\chi^2(p)$ 분포를 따른다. 이 검정과 McLeod-Li 검정은 제2차 적률의 비선형성을 살피는 검정이다.

다. McLeod-Li 검정방법

잔차들이 선형독립적이고 동일하게 분포된 과정을 따르고 있으면 잔차제곱들의 交叉積은 교차적들의 제곱과 동일한 상관구조를 갖게 된다는 원리에 입각한 검정방법이 McLeod-Li(1983) 검정법이다. 즉, 모든 k에 대하여 $corr(y_t^2, y_{t-k}^2) = [corr(y_t, y_{t-k})]^2$이 형성될 때에는 시계열 상관에 대한 Box-Ljung 검정을 선형모형의 잔차제곱에 적용할 수 있다. 따라서 다음과 같은 절차에 의하여 선형성의 귀무가설에 대한 검정이 가능하다.

(1) $y_t = z'_t\beta + e_t$를 선형회귀식으로 추정하여 잔차 $\hat{e}_t$를 저장해 둔다.

(2) 잔차제곱들 $\hat{e}_t$의 시계열 상관함수를 차수 m까지 계산한다. 즉,

$$\hat{\rho}(i) = \sum_{t=i+1}^{T}(\hat{e}_t^2 - \hat{\sigma}^2)(\hat{e}_{t-i}^2 - \widehat{\sigma})^2$$

위에서 $\hat{\sigma}^2 = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\hat{e}_t^2$

(3) 선형성의 귀무가설의 검정통계량은 다음과 같다.

$$T(T+2)\sum_{j=1}^{m}[\hat{\rho}(j)]^2/(T-j)$$

귀무가설 하에서 McLeod-Li 검정통계량은 $\chi^2(m)$ 확률변수이다. 이 검정은 ARCH LM 검정과 같이 제2차 적률의 비선형성을 검정하는 기법이다.

라. Ramsey 검정

Ramsey (1969)의 RESET 검정법은 Volterra 전개에 의하며 선형성을 검정하는 Keenan (1985) 검정의 일반화라 할 수 있다. RESET 검정에서는 y_t의 추정값 $\widehat{y_t}$의 고차제곱들의 설명력을 검토하여 비선형성의 존재 여부를 파악하고 있기 때문이다. Keenan 검정의 정치화가 Tsay (1986) 검정이다. 검정 절차는 다음과 같다.

(1) $y_t = z_t'\beta + e_t$를 선형회귀하고 $\hat{e}_t$와 추정값 $\hat{y}_t$를 저장한다.

(2) y_t와 $\hat{y}_t$에 대하여 다음의 회귀식을 정립하고 추정하여 잔차 v_t를 저장한다.

$$y_t = z_t'\beta + c_2\hat{y}_t^2 + c_3\hat{y}_t^3 + \cdots + c_k\hat{y}_t^k + v_t$$

(3) 귀무가설은 $H_0 : c_2 = c_3 = \cdots = c_k = 0$이며, 다음의 RESET 통계량에 의하

여 귀무가설을 검정한다.

$$\frac{(\hat{e}'\hat{e}-\hat{v}'\hat{v})/(k-1)}{\hat{v}'\hat{v}/(T-k)}$$

이 통계량은 귀무가설 H_0 하에서 $F(k-1,\ T-k)$ 분포를 따른다. 이 RESET 검정은 Tsay 검정과 함께 평균의 비선형성을 검정하는 방법이다.

2. 검정결과

주별수익률과 월별수익률이 비선형의 데이터 생성과정을 따르고 있는지의 여부를 검정하기 위하여 Akaike 정보기준에 의하여 선정된 선형 필터로 일별수익률의 경우 AR(1), 그리고 주별수익률의 경우 AR(2)를 사용하였다. 따라서 귀무가설은 주식수익률 시계열이 1개 시차와 2개 시차(lag)에 대하여 평균에서 선형이라는 것을 의미한다. 이것은 설명변수들의 행렬이 상수와 2개 시차변수로 구성된다는 것을 의미한다. RESET 검정에서 k = 2이다. McLeod-Li 검정에서 m = 40이고 ARCH LM 검정에서 p = 4이다.

일별 주가수익률의 시계열에 대한 선형성 여부에 대한 각종 검정통계량을 <표 7>에 제시한다. 이 표에서 보는 바와 같이 ARCH LM 검정은 유의수준 1%에서 주가 생성과정이 비선형성이라는 것을 지지하고 있다. McLeod-Li 검정은 선형성의 귀무가설을 지지하고 있다. 그러나 RESET 검정은 유의수준 5%에서 선형성의 귀무가설을 기각하고 있다.

<표 8>은 주별수익률 시계열에 대한 선형성여부의 검정이다. ARCH LM 검정은 유의수준 1%에서, 주별 주가수익률의 시계열이 선형과정을 따른다는 가설이 기각되고 있다. 그러나 McLeod-Li 검정과 RESET 검정에서는 선형성의 귀무가설을 기각하는데 실패하고 있다.

일별수익률과 주별수익률에서 McLeod-Li 검정 방법은 비선형을 제거하고 있다. 그러나 ARCH LM 검정방법은 비선형성을 제거하지 못하고 있어 비선형의

<표 7> 線形性의 檢定(日別)

검정	ARCH LM	McLeod-Li	RESET
통계량	442.499**	1.0002	3.329*
분포	$\chi^2(4)$	$\chi^2(40)$	F(4, 4976)

* 유의수준 5%에서 線形性의 귀무가설 기각
** 유의수준 1%에서 線型性의 귀무가설 기각

<표 8> 線形性의 檢定(週別)

검정	ARCH LM	McLeod-Li	RESET
통계량	44.163**	0.069	0.83×10^{-6}
분포	$\chi^2(4)$	$\chi^2(40)$	F(4, 877)

* 유의수준 5%에서 線形性의 귀무가설 기각
** 유의수준 1%에서 線型性의 귀무가설 기각

증거가 그래도 남아 있다. RESET 검정에 있어서는 일별수익률은 선형성의 귀무가설을 5%에서 기각하고 주별수익률에 있어서는 기각에 실패하고 있다. ARCH LM 검정과 McLeod-Li 검정은 2차 積率에 있어서의 비선형성을 인지하는 검정방법이고 RESET 검정은 평균에 있어 비선형성을 판단하기 위한 검정방법이다. 그런데 일별수익률과 주별수익률의 분산에 있어서 비선형이 존재하고 있다는 것이 ARCH LM 검정에서 확인되고, 평균에서 비선형의 존재가 RESET 검정에서 입증되고 있다. 평균과 분산에서 비선형성이 입증되고 있고, 반면에 평균과 분산에서 선형성이 입증되고 있는 실정이다.

VI. 결 론

이 논문에서는 주가가 카오스에 의하여 생성되는 과정인가 아닌가를 실증분석을 통하여 규명하였다. 어느 시계열이 무작위적이거나 불규칙하게 보이지만 이

형태가 확률적 과정에 의하여 형성되는 것이 아니라 결정론적 비선형 동태에 의하여 만들어지고 이 비선형동태의 운동이 초기조건에 대한 민감한 의존성을 갖고 동시에 자기 닮음의 성질을 가지면, 이 시계열은 카오스에 의하여 생성된다. 주가가 카오스 과정을 따르면 주가는 단기적으로는 예측이 가능하다. 그러나 장기적으로는 예측이 불가능하다. 왜냐하면 어느 두 시계열이 무한소의 극미한 차이를 갖는 초기 조건들에 의하여 동시에 출발하되 초기조건을 제외하고는 함수의 형태를 비롯한 모든 면에서 동일한 경우에도 일정한 시간이 경과한 후에는 이 시계열들이 완전히 다른 궤적들을 보여주기 때문이다.

일별 종합주가지수와 주별 종합주가지수를 사용하여 주가에 대한 카오스검정을 수행하였다. 카오스 이외의 요인으로부터 발생하는 비선형성을 어느 시계열에서 제외시키고 카오스 성질만을 남게 한 후 독립적인 동등분포성을 검정하는 BDS검정법, 가우스性(정규성)과 카오스 비선형성에 대립되는 선형성의 검정을 목적으로 하는 二分光法 또는 Hinich 검정법, 초기조건에 대한 민감한 의존성을 판별하는 리아푸노프 지수에 대한 검정법, 자기닮음 여부의 검정, 그리고 쪽거리지수에 대한 검정을 통하여 주가가 카오스系에 속하고 있다는 가설이 기각되었다. 이 검정방법들은 시계열에 의한 카오스性을 검정하거나 카오스의 성질 하나하나를 개별적으로 검정하는 방법들이다.

이 방법들을 통하여 카오스의 모든 성질들을 하나 하나 검정하고 나아가 전체적으로 카오스性을 검정하였다. 그러나 어느 하나의 방법에도 주가가 카오스에 의하여 생성된다는 가설을 수용하지 못하고 있다.

주가가 카오스系에 속하고 있다는 것은 발견되지 못하고 있으므로 카오스 비선형성은 존재하지 않는다. 그러나 카오스로 부터 발생하지 않고 다른 원천으로부터 생성되는 비선형성은 존재할 가능성도 있어 이에 대한 검정도 수행하였다. 비선형성은 카오스에 의해서도 발생하지만 장기기억이나 지속성에 의해서도 형성된다. 검정 결과 비선형성이 존재하고 있으며 이 비선형성은 주가 과정에 가해진 충격들이 사라지지 않고 존속하며 이 사라지지 않고 영속하는 충격들의 총화에 의하여 이루어지고 있음을 알 수 있었다. 아울러 주가는 정규분포에 의하여

형성되고 있으며 白色雜音過程을 따르고 있음이 발견되었다. 주가의 생성과정 함수의 성질을 규명하기위한 비선형성을 여러 각도에서 검증하는 바, 일별 종합주가 수익률과 주별 종합주가 수익률은 평균에 있어서 비선형성의 증거가 발견되고 분산에 있어서도 비선형성의 증거가 제시되고 있다. 이와는 반대로 평균과 분산에 있어 다같이 선형성의 증거가 확인되고 있기도 하다.

자기회귀모형을 분석하여 AR(2)가 선형 필터로 선정됨에 따라 비선형성을 검정하기 위한 각 모형에 자기시차변수 2개를 사용하여 각 검정통계량이 추정되었다. AR(2)의 잔차가 비선형성을 따른다는 증거와 따르지 않는다는 증거가 반반으로 양분되어 있다. 그렇다면 오히려 선형 필터인 AR(2)가 정당한 선형 필터가 아닐 가능성도 배제하기는 어렵다고 할 수 있다. 자기회귀모형 이외에 ARMA와 ARIMA를 비롯하여 GARCH 계통의 모형의 잔차들에 대한 검정도 시도되어야 잔차들의 비선형성 여부에 대한 결론이 보다 확실하게 내려질 수 있을 것이다.

투자자는 장기 기대와 동시에 단기 기대도 사용하여 투자 활동을 전개한다. 장기 기대는 합리적으로 형성되고 있으나 단기 기대는 대체적으로 비합리적으로 형성되는 경우가 많다. 우리나라의 증권시장은 합리적 장기 기대형성에 입각한 투자 양태보다는 비합리적 단기 기대형성에 기초를 둔 투자행동이 주를 이루고 있다는 것이 실무계의 속설로 제기되어 있기도 하다. 만일 이 속설을 인정하면, 투자자는 비합리적 단기 기대에 따라 투자 활동을 전개하게 되고 단기 기대값이 상당히 높게 형성될 때에는 도약에 가까운, 가파른 상승 연속선의 매수 현상이 발생하고 단기 기대값이 상당히 낮게 결정되면 추락에 가까운 가파른 하강 연속선의 매도가 발생할 것이다.

이와 같은 급격한 수직상승과 수직하락에 가까운 현상이 비합리적 단기 기대하에서는 빈번히 발생할 가능성이 존재한다. 이런 상황 하에서 주가의 움직임은 비선형적이다. 주가의 급격한 상하운동은 주별보다는 일별에서 보다 많이 발생할 것이다. 이 때에는 일별수익률과 주별수익률의 운동법칙이 다르게 나타날 것이고 일별수익률이 주별수익률보다 비선형성의 행태가 노출되어야 할 것이다. 분산에

서 비선형성이 형성되는지의 여부를 검정하는 ARCH LM 검정에서 일별과 주별의 비선형성에 대한 증거를 제시하고 있다. 선형성의 지지는 다른 두 검정에 의하여 일별과 주별에서 획득되어 있다. 이 관점에서 보면 일별수익률에 대한 기대형성과 주별수익률에 대한 기대형성이 동일하다고 할 수 있다.

< 참 고 문 헌 >

李逸均, Noise and Chaos, 특별세미나논문집, 韓國財務管理學會, (1997), pp.1-15.

李逸均, 株價의 非線形性과 時系列的 特性, 財務管理論叢 第 3 卷 第 1 號 (1996), pp.1-34.

李逸均, 長期記憶과 資本資産의 價格, 財務管理論叢 第 2 卷 第 1 號 (1995), pp.1-22.

李逸均, 쪽거리와 장기기억, 財務管理硏究 第 13 卷 第 1 號 (1995), pp.1-17.

李逸均, CHAOS, 財務管理論叢 第 1 卷 第 2 號 (1994), 1-50.

李逸均, 시계열자료와 재무관리이론, 財務管理硏究, 第 11 卷 第 1 號, (1994), 1-23.

李逸均, 證券의 日別 收益率과 月別 收益率의 特性에 관한 硏究, 證券學會誌, 第 11 集, (1989), 199-229

李逸均, 韓國證券市場의 日別株價收益率의 非同時發生性에 대한 檢證, 순양 유용근선생 회갑기념 논집, (1989), 477-490.

장국현 · 이 진, 우리나라 債券收益率의 異分散性에 관한 硏究, 財務管理硏究, 第 13 卷, 第 1 號, (1996), 203-220.

Anis, A. A. and Lloyd, E. H., "The Expected Value of the Adjusted Rescaled Hurst Range of Independent Normal Summands." *Biometrika*, No.63(1976).

Arby, P., D. Veitch and Flandrin, P., "Long-Range Dependence: Revisiting Aggregation with Wavelets", *Journal of Time Series Analysis*, No.19(1998), pp.253 - 266.

Ashley, R.A., Patterson, D.M., and Hinich, M, "A Diagnostic Test for Nonlinear Serial Dependence in Time Series Fitting Errors", *Journal of Time Series Analysis*, No.73(1986), pp.165-178.

Baillie, R. T. and Bollerslev, T., "A Multivariate Generalized ARCH Approach to Modeling Risk Premia in Forward Foreign Rate Markets," *Journal of International Money and Finance*, No.9(1990), pp.309-324.

Baillie, R, T. and Bollerslev, T., "Conditional Forecast Densities from Dynamic Models with GARCH Innovations," *Journal of Econometrics*, No, 52(1992), pp.91-113.

Barnett, W.A. and Chen, P., "Economic Theory as a Generator of Measurable Attractors", Mondes on Developpment, No.14(453), pp.13-28; Reprinted In: Prigogine, I. and Sanglier, M. (Eds), Laws of Nature and Human Conduct: Specificities and Unifying Themes, G.O.R.D.E.S., Brussels, (1986), pp.209-224.

Barnett, W.A. and Chen, P., "The Aggregation-Theoretic Monetary Aggregates are Chaotic and have Strange Attractors: An Econometric Application of Mathematical Chaos". In: Barnett, W., Berndt, E., White, H.(Eds), Dynamic Econometric Modeling, Proceedings 3rd International Symposium in Economic Theory and Econometrics. Cambridge University Press, Cambridge, (1988a), pp.199-246.

Barnett, W.A. and Chen, P., "Deterministic Chaos and Fractal Attractors as Tools for Nonparametric Dynamical Econometric Inference". *Mathematical Computer Modeling*, No. 10(1988b), pp.275-296.

Barnett, W. and Hinich, M.J., "Empirical Chaotic Dynamics in Economics". *Annals of Operations Rearch*, No 37(1992), pp.1-15.

Barnett, W. and Hinich, M.J., "Has Chaos been Discovered with Economic Data". in: Chen, P., Day, P.(Eds), Evolutionary Dynamics and Nonlinear Economics. Oxford University Press, Oxford, (1993), pp.254-263.

Barnett, W.A., Gallant, A.R., Hinich, M.J., Jungeilges, J., Kaplan, D., and Jensen, M.J., "Robustness of Nonlinearity and Chaos Tests to

Mesurement Error, Inference Method, and Sample Size". *Journal of Economic Behavior and Organization*, No. 27(1995), pp.301-320.

Barnett, W.A., Gallant, A.R., Hinich, M.J., Jensen, M.J., and Jungeilges, J., "Comparisons of the Available Tests for Nonlinearity and Chaos". In: Barnett, W.A., Gandolfo, G., Hillinger, C.(Eds), Dynamic Disequilibrium Modeling: Theory and Applications. Cambridge University Press, Cambridge, (1996), pp.313-346.

Barnett, W.A., Gallant, A.R., Hinich, M.J., Jungeilges, J., Kaplan, D., and Jensen, M.J., "An Experimental Design to Compare Tests of Nonlinearity and Chaos". In: Barnett, W., Kirman, A., Salmon, M.(Eds), Nonlinear Dynamics in Economics. Cambridge University Press, Cambridge, (1996b), pp.163-191.

Barnett, W. A., Geweke, J., and Snell, K., Economic Complexity: Chaos, Sunspots, Bubbles and Non-linearity, Cambridge University Press, Cambridge,1989.

Baumol, W. J. and Quandt, R. E., "Chaos Models and Their Implications for Forecasting," *Eastern Economic Journal*, No.15(1991), pp.201-214.

Beveridge, S. and Nelson, C. R., "A New Approach to the Decomposition of Economic Time Series into Permanent and Transient Components with Particular Attention to Measurement of the Business Cycle." *Journal of Monetary Economics*, No.7(1981), pp.151-174.

Bollerslev, T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, No.31(1986).

Bollerslev, T., Chou, R. Y., and Kroner, K. F., "ARCH Modeling in Finance," *Journal of Econometrics*, No.52(1992), pp.5-59.

Bollerslev, T., and Engle, R. F., "Common Persistence in Conditional Variances," *Econometrica*, No.61(1993), pp.167-186.

Bollerslev, T., Engle, R., and Wooldridge, J. M., "A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances," *Journal of Political Economy,* No.96(1988), pp.116-131.

Brock, W. A., Hsieh, D. A., and LeBaron, B., Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability, MIT Press, Cambridge, Mass, 1991.

Brock, W. A., Dechert, W. D., Lebaron, B., and Scheinkman, J., "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension." *Econometric Reviews*, No.15(1996), pp.197-235.

Broomhead, D. S., Huke, J.P., and Muldoon, M.R., "Linear Filters and Non-Linear Systems." *Journal of the Royal Statistical Society* B, No. 54(1992), pp.373-382.

Campbell, J. Y. and Kyle, A. S., "Smart Money, Noise Trending and Stock Price Behavior," *Review of Economic Studies*, No. 60(1993), pp.1-34.

Casdagli, M., Eubank, S., Farmer, J.D., and Gilbson, J., "State Space Reconstruction in the Presence of Noise." *Physica* D, No. 51(1991), pp.52-98.

Chen, P., "Empirical and Theoretical Evidence of Economic Chaos", *System Dynamics Review*, No. 4(1998).

DeCoster, G.P. and Mitchell, D.W., "Nonlinear Monetary Dynamics". *Journal of Business and Economic Statistics*, No. 9(1991a), pp.455-462.

DeCoster, G.P. and Mitchell, D.W., "The Efficacy of the Correlation Dimension Technique in Detecting Determinism in Small Samples". *Journal of Statistical Computer Simulation*, No. 39(1991), pp.221-229.

DeCoster, G.P. and Mitchell, D.W., "Dynamic Implications of Chaotic Monetary Policy". *Journal of Macroeconomics*, No. 14(1992), pp.267-287.

DeCoster, G.P., Mitchell, D.W., "Reply". *Journal of Business and Economic Statistics*, No. 12(1994), pp.136-137.

Decoster, G. P., Labys, W. C., and Mitchell, D. W., "Evidence of Chaos in Commodity Futures Prices," *Journal of Futures Markets*, No. 12(1991), pp.291-305.

De Gooijer, J. G., "Testing Non-linearities in World Stock Market Prices," *Economics Letters*, No. 31(1989).

De Grauwe, P., Dewachter, H., and Embrechts, M., Exchange Rate Theory: Chaotic Models of Foreign Exchange Markets, Blackwell, Oxford, 1993.

De Long, J. B., Shleifer, A., Summers L. H., and Waldmann, R. J., "Noise Trader Risk in Financial Markets," *Journal of Political Economy*, No. 98(1990), pp.703-738.

Diebold, F. X. and Rudebusch, G. D., "Long Memory and Persistence in Aggregate Output," *Journal of Monetary Economics*, No. 24(1989), pp.189-209.

Diebold, F. X. and Nerlove, M., "Unit Roots in Economic Time Series: A Selective Survey," *Advances in Econometrics*, No. 8(1990), pp.3-69.

Eckmann, J.P. and Ruelle, D., "Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors", *Review of Modern Physics*, No. 57(1985), pp.617-656.

Eldridge, R. M., "Evidence of Chaos in the S&P 500 Cash Index," *Advances in Futures and Options Research*, No. 6(1993), pp.179-192.

Ellner, S., Gallant, A.R., McCaffrey, D. and Nychka, D., "Convergence Rates and Data Requirements for Jacobian-Based Estimates of Lyapunov Exponents from Data". *Physics Letters* A, No. 153(1991), pp.357-363.

Engle, R. F., "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometica*, No. 50(1982), pp.987-1007.

Engle, R. F. and Mustafa, C., "Implied ARCH Models from Options Prices."

Journal of Econometrics, No. 52(1992), pp.289-311.

Engle, R. F. and Granger, C. W. J., "Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing," *Econometrica*, No. 55, 251-276.

Fama, E. F., Foundations of Finance: Portfolio Decision and Security Prices, Basic Books Inc, New York,1988.

Fama, E. F., and French, K. R., Dividend Yields and Expected Stock Returns, *Journal of Financial Economics*, No. 22(1988), pp.3-25.

Frank, M. and Stengos, T., "Measuring the Strangeness of Gold and Silver Rates of Return," *Review of Economic Studies*, No. 56(1989), pp.553-567.

French, K., Schwert, W. and Stambaugh, R., "Expected Stock Returns and Volatility," *Journal of Financial Economics*, No. 19(1986), pp.3-29.

Gencay, R., and Dechert, W.D., "an Algorithm for the n Lyapunov Exponents of an n-Dimensional Unknown Dynamical System". *Physica* D, No. 59(1992), pp.142-157.

Geweke, J. and Porter-Hudak, S., "The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models," *Journal of Time Series Analysis*, No. 4(1983), pp.221-238.

Gilmore, C. G., "A New Test for Chaos," *Journal of Economic Behavior and Organization*, No. 22(1993), pp.209-237.

Granger, C. W. J. and Joyeux, R., "An Introduction to Long-Memory Time Series Models and Fractional Differencing," *Journal of Time Series Analysis*, No 1(1980), pp.15-39.

Grassberger, P., and Procaccia, I., "Measuring the Strangeness of Strange Attractors". *Phisical Review*, No. 9D(1983), pp.189-208.

Hinich, M.J., "Testing for Gaussianity and Linearity of a Stationary Time

Series". *Journal of Time Series Analysis*, No. 3(3)(1982), pp.169-176.

Hinich, M.J., "Testing for Dependence in the Input to a Linear Time Series Model". *Nonparametric Statistics*, No. 6(1996), pp.205-221.

Hinich, M.J. and Patterson, D., "Identification of the Coefficients in a Non-linear Time Series of the Quadratic Type". Journal of Econometrics, No. 30(1985), pp.269-288. Reprinted In: Barnett, W., Gallant, R.,(Esd), 1989. New Approaches to Modelling, Specification Selection, and Econometric Inference, Proceedings 1st International Symposium in Economic Theory and Econometrics. Cambridge University Press, Cambridge.

Hinich, M.J. and Patterson, D., "Evidence of Nonlinearity in the Trade-by-Trade Stock Market Return Generating Process". In: Barnett, W., Geweke, J., Shell, K.(Eds), Economic Complexity: Chaos, Sunspots, Bubbles, and Nonlinearity, Proceedings 4th International Symposium in Economic Theory and Econometrics. Cambridge University Press, Cambridge, (1989), pp. 383-409.

Hommes, C. H., "Adaptive Learning and Roads to Chaos: The Case of the Cobweb," *Economics Letters*, No. 36(1991), pp.127-132.

Hosking, J. R. M., "Fractional Differencing", *Biometrika*, No. 68(1981), pp.165-175.

Hsieh, D. A., "Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets," *Journal of Finance*, No. 46(1991).

Hsieh, D. A., "Implications of Nonlinear Dynamics for Financial Risk Management," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, No. 28(1993), pp.41-64.

Hurst, H. E., "Long-Term Storage Capacity Reservoirs", *Transportration American Social Civil Engineering*, No. 116(1951), pp.770-799.

Jungeilges, J.A., "Operational Characteristics of White's Test for Neglected Nonlinearities". In: Barnett, W., Kirman, A., Salmon.(Eds), "Nonlinear Dynamics in Economics". Cambridge University Press, Cambridge, (1996), pp.219-266.

Kaplan, D.T., "Exceptional Events as Evidence for Determinism". *Physica* D, No. 73(1994), pp.38-48.

Keenan, D. M., "A Tukey Nonadditivity-type Test for Time Series Nonlinearity", *Biometrika*, No. 72(1985), pp.39-44.

Larrain, M., "Testing Chaos and Nonlinearities in T-Bill Rates," *Financial Analysts Journal*, (1991), pp.51-62.

Liu, T., Granger, C. W., and Heller, W. P., "Using the Correlation Exponent to Decide Whether an Economic Series Is Chaotic," *Journal of Applied Econometrics*, No. 7(1992), pp.S25-S39.

Lo, A. W., "Long Term Memory in Stock Market Prices," *Econometrica*, No. 59(1991), pp.1279-1313.

Loreng, H. W., "Deterministic Nonperiodic Flow," *Journal of the Atmospheric Sciences*, No. 20(1963), pp.120-141.

McCaffrey, D. F., Ellner, S., Gallant, A. R., and Nychka, D. W., "Estimation the Lyapunov Exponent of a Chaotic System with Nonparametric Regression". *Journal of the American Statistical Association*, No. 87(1992), pp.682-695

McLeod, A. I. and Li, W. K., "Diagnostic Checking ARMA Time Series Models Using Squared-residual Autocorrelation", *Journal Time Series Analysis*, No. 4(1983), pp. 469-273.

Medio, A., Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

Nelson, C. R. and Plosser, C. I., "Trends and Random Walks in

Macroeconomic Time Series: Some Evidence and Implications". *Journal of Monetary Economics* Vol. 10(1982), pp.139-162.

Nelson, D. B., "Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model." *Econometric Theory*, No. 6(1990), pp.318-334.

Nychka, D., Ellner, S., Gallant, R., and McCaffrey, D., "Finding Chaos in Noisy Systems", *Journal of the Royal Statistical Society* B, No. 54(1992), pp.399-426.

Oscar Bauo-Rubio, Fernando Fernández-Rodríguez and Simón Sosvilla-Rivero, "Chaotic Behavior in Exchange-Rate Series: First Results for the Peseta-United States Dollar Case," *Economics Letters*, No. 39(1992), pp.207-211.

Peters, E. E., "A Chaotic Attrator for the S&P 500," *Financial Analysts Journal*, No. 47(1991), pp.55-62.

Poggi, J.-M and Viano, M.-C., "An Estimate of the Fractal Index Using Multiscale Aggregates", *Journal of Time Series Analysis*, No. 19(1998), pp.221-223.

Poterba, J. and Summers, L., "Mean Reversion in Stock Returns: Evidence and Implications", *Journal of Financial Economics*, No. 22(1988), pp.27-59.

Ramsey, J. B., "Tests for Specification Errors in Classical Linear Least Squares Regression Analysis", *Journal of the Royal Statistical Society* B, No. 31(1969), pp 350-371.

Ramsey, J. B. and Rothman, P., "Comment on 'Nonlinear Monetary Dynamics' by DeCoster and Mitchell", *Journal of Business and Economic Statistics*, No. 12(1994), pp.135-136.

Ramsey, J. B., Sayers, C.L., and Rothman, P., "The Statistical Properties of Dimension Calculations Using Small Data Sets: Some Economic

Applications". *International Economic Review,* No. 31(1990), pp.991-1020.

Rhee, Il King, "Empirical Tests on the Consumption-based Asset Pricing Model by Estimating the Risk Aversion Coefficient in the Korean Economy", *Research in International Business and Finance* IIA, (1994), pp.181-215.

Savit, R., "Nonlinearities and Chaotic Effects in Options Prices," *Journal of Futures Markets,* No. 9(1989), pp.507-518.

Savit, R., "When Random Is Not Random: An Introduction to Chaos in Market Prices," *Journal of Futures Markets,* No. 8(1988), pp.271-289.

Scheinkman, J. A., and LeBaron, B., "Nonlinear Dynamics and stock Returns," *Journal of Business,* No. 62(1989).

Scheinkman, J. and LeBaron, B., "Nonlinear Dynamics and GNP Data". In: Barnett, W., Geweke, J., Shell, K.(Eds), "Economic Complexity: Chaos, Sunspots, Bubbles, and Nonlinearity, Proceedings 4th International Symposium in Economic Theory and Econometrics". Cambridge University Press, Cambridge, (1989), pp.213-227.

Schinasi, G. J., "A Nonlinear Dynamic Model of Short Run Fluctuations," *Review of Economic Studies,* No. 48(1981).

Serletis, A., "Random Walks, Breaking Trend Functions, and the Chaotic Structure of the Velocity of Money", *Journal of Business and Economic Statistics,* No. 4(1995). pp.453-458.

Shaffer, S., "Structural Shifts and the Volatility of Chaotic Markets," *Journal of Economic Behavior and Organization,* No. 15(1991), pp.201-214.

Smith, R.L., "Estimating Dimension in Noisy Chaotic Time Series". *Journal of Royal Ststistical Society* B, No. 54(1992), pp.329-351.

Strogatz, S. H., Nonlinear Dynamics and Chaos, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1994.

Subba Rao, T. and Gabr, M., "A Test for Linearity of stationary Time Series", *Journal of Time Series Analysis*, No. 1(1980), pp.145-158.

Taylor, S., Modeling Financial Time Series, Wiley, New York, 1986.

Tsay, R., "Nonlinearity Tests for Time Series, *Biometrika*, No. 73(1986), pp.461-466.

Tong, H., Non-Linear Time Series: A Dynamical System Approach, Oxford University Press, Oxford, England, 1990.

Weiss, M. D., "Nonlinear and Chaotic Dynamics: An Economist's Guide," *Journal of Agricultural Economics Research*, No. 43(1991), pp.2-17.

White, H., "Some Asymptotic Results for Learning in Single Hidden-Layer Feedforward Network Models". *Journal of the American Statistical Association*, No. 84(1989a), pp.1003-1013.

White, H., "An Additional Hidden Unit Test for Neglected Nonlinearity in Multilayer Feedforward Networks". In: Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks, vol. 2. IEEE Press, New York, (1989b), pp. 451-455.

Willey, T., "Testing for Nonlinear Dependence in Daily Stock Indices," *Journal of Economics and Business*, No. 44(1992), pp.63-76.

Yang, Seung-Ryong and Brorsen, B. W., "Nonlinear Dynamics of Daily Futures Prices: Conditional Heteroskedasticity or Chaos?" *Journal of Futures Markets*, No. 13(1993), pp.175-191.

ABSTRACT

Chaotic Formation and Pricing Mechanism in Capital Markets

Il King Rhee

This paper is to test for the hypothesis that stock prices follow a chaos process. The daily and weekly Korean Stock Price Indices are used in the tests. In this paper employed are the BDS test, Hinich method, Lyapunov exponent test, self-similarity test, and fractal dimensional test. Each of the tests has no evidence that the stock price is generated by a chaos process. Evidence is, however, found that the privce is formed by a nonlinear process, which is characterized by a long-memory process and persistence.