삼단 논법에 대하여

李　建　源
(서울대 강사)

삼단 논법에 대하여

삼단 논법이 기호 논리학에 그 자리를 양보하지 않을 수 없었던 추세는 벌써 오랜 일이다. 초기의 기호 논리학이 일상의 활용에 미비한 점이 있어서 지금도 삼단 논법을 교수하고 있는 경향이 있으나 이는 어디까지나 역사적인 흥미 이상의 것은 아니라는 것을 지적하여야 마땅하다고 하겠다.(1) 술어 계산의 자연적 연역법에 능숙한 학생들은 별도로 고려할 필요가 없으나, 교육적인 편의에서 삼단 논법의 그림이 지금도 활용되고 있다.(2)

그러나 근본적인 문제는 단순한 삼단논법 자체의 문제가 아니고 논리일반의 문제이고, 이가 집합론이나 기호논리 일반에서는 충분히 고려되었으나 삼단 논법이나 기타의 활용에서 고려되지 않음으로서 생기는 혼선이라고 보여진다. 20세기 초에 논리학 일반의 주요관심은 역리(3)였다는 것은 잘 알려져 있다. 럿셀의 유형론이 불가피하게 도입되고 모든 성질은 논쟁의 범위가 확정되어야 한다는 것이 집합론에 도식화 되었다.(4) 개개의 성질에 논쟁의 범위가 언급되어야 한다는 것은 전체 집합이 없기 때문이다. 그러한 이유에서 논쟁의 범위는 역리를 제거하는데 불가피하다는 것은 벌써 다 알려진 사실이다.

또 다른 전통논리 즉 삼단 논법과 다른 점은 조건을 나타내는 함의를 질료적 함의로 확정시킨 점이라고 하겠다. 질료적 함의에서 전건이 참이고 후건이 거짓인 경우만이 거짓이고 그외의 모든 경우는 참으로 하도록 하는 것은 순수한 의미의 형식 과학의 필수 조건이 된 것이라고 말할 수 있다.(5) 이러한 조건이 고려되고 나면 순수한 외연적 언어인 집합론으로 명제들이 나타나질 수 있고 그림이라고 하는 것이 원래가 그 외연만을 고려하기 때문에 그림과 일상 언어의 명제, 그리고 집합론이 일치하게 된다. 따라서 그림과 종래의 삼단 논법과의 차이는 종래의 삼단논법이 순수하게 외연만을 고려하지 않는 것으로 이해할 수 있을 것이다.

---

(1) 명제 계산 및 술어 논리의 자연적 연역법. 부록 I 참조.

(2) 소 흥렬 "삼단 논법과 간접 다이어그램" 철학 15집 1981.

(3) Russell, Bertrand의 "Type theory"와 ***Principles of Mathematies, Principia Mathematica,*** Copi, Irving M. ***Theory of logical types*** Kegan Paul 참조.

(4) 부록 II 참조

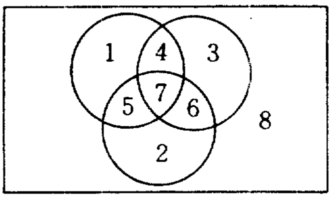
(5) 형식 논리는 그래서 외연적 언어(extentional language)가 된다.

1) 학자는 진리만을 사랑한다.
진리만을 사랑하면 비판적이다.
따라서 어떤 학자는 비판적이다.

2) $(\forall_x)\ (\text{학}_x \supset \text{진}_x)$
$(\forall_x)\ (\text{진}_x \supset \text{비}_x)$
$\therefore\ (\exists_x)\ (\text{학}_x \wedge \text{비}_x)$

3) $\text{학} \setminus \text{진} = \phi$, $(\text{학} \cap \text{진}^{\text{보}} = \phi)$ (6)
$\text{진} \setminus \text{비} = \phi$, $(\text{진} \cap \text{비}^{\text{보}} = \phi)$
$\therefore\ \text{학} \cap \text{비} \neq \phi$

4)



1) 의 삼단논법을 2)에서 제일술어 논리로 바꾸어 쓰고 3)에서 집합론으로 나타냈으며 4)에서 밴의 그림(7) 으로 나타냈다. 종래의 아리스토텔래스의 논리에서는 1)이 타당하다고 하였으나 이는 부당하다는 것은 2), 3), 4)에서 곧 알 수 있다.(8)

우선 2)의 부당성 증명부터 살펴본다.

$(\forall_x)\ (\text{학}_x \supset \text{진}_x)$
$(\forall_x)\ (\text{진}_x \supset \text{비}_x)$
$\therefore (\exists_x)\ (\text{학}_x \wedge \text{비}_x)$

이는 그 타당성이 증명되지 않는다. 그러나 증명되지 않음을 증명하여야 한다. 증명되지 않음을 증명하는 것은 즉 부당성의 증명은 자연적 연역법으로는 불가능하기 때문에 제일 술어 논리의 진위표를 사용하여야 한다. 모델이 공집합인 경우 즉 우리의 논쟁의 범위속에 학자 등이 하나도 없는 경우를 생각하면 :

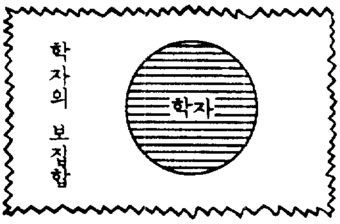
$(\forall_x)\ (\text{학}_x \supset \text{진}_x)$이 참이다.
$(\forall_x)\ (\text{진}_x \supset \text{비}_x)$도 참이다.

그러나 $(\exists_x)\ (\text{학}_x \wedge \text{비}_x)$는 참이 아니다. 따라서 전제들이 참인데 결론이 거짓인 경우가 있어서 2) 는 부당한 논쟁임이 증명된 것이다. 2), 3)을 살펴본다.

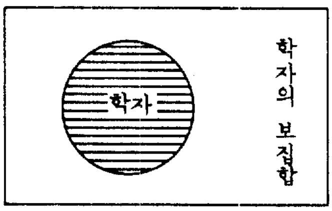
하나의 집합을 생각하면, 부정의 운용을 인정하기 때문에 곧 그 보집합도 생각하여야

(6) 진보 : 진의 보집합(補集合)
(7) Venn Diagram
(8) 종래에 타당하다고 알려져 있던 삼단 논법들 중에서 부당함이 밝혀진 것이 몇개 된다. 그러나 구태여 어떤 것이 부당한 것인가를 외우기 보다는 2), 3), 4)의 어떤 것으로 번역하여도 쉽게 알 수 있어 열거할 필요는 없다.

한다. 즉 학자의 부정은 학자의 보집합인데 그림으로 우리는 다음과 같이 나타낸다.



학자라는 집합의 외연이 확정되었다고 생각하여 우선 원으로 나타냈으나 그 보집합이 무엇인지는 그림에 나타나지 않는다. 전체 집합이 있다면 종래 일부의 집합론에서처럼 전체 집합에서 주어진 집합을 제외한 것이 보집합이라고 하였으나 집합론에서는 외연만을 고려한다는 것을 감안하면 전체 집합의 외연은 "전체 집합"이라는 표현이 있을 뿐 확정지을 수 없기 때문에 논쟁의 범위(9)를 확정하여야만 한다.



여기서 □은 논쟁의 범위이다. 「도덕경」의 저자에 대한 논쟁이 있다.(10) 여기서 책이 있으니 저자가 있을 것이고 그 저자를 「노자」라고 한다고 하고 그에 대한 서술이 많이 있다는 것은 다 아는 사실이다. 그러나 논쟁은 그가 역사상에 실재하였는가 하는 것이다. 또는 여러 사람이었지 않았겠느냐 하는 것이다. 그래서 여기서 실재 여부를 이야기 한다는 것은 보통 그 "실재"라는 뜻에 따라서 달라질 것이라고 한다. 이 "실재"라는 것의 뜻이 달라진다는 것은 결국 논쟁의 범위가 달라진다는 것이다. 조금 더 정확하게 말한다면 「노자」가 역사적 인물인가 하는 것이다. 이때는 논쟁의 범위를 「물리적인 실재」로 생각한 것이라고 볼 수 있다. 그러나 우리는 춘향이처럼 역사적인 실재인물 즉 여기서 말한 물리적 실재는 아니더라도 그 인물에 대한 서술이 물리적으로 실재하였던 어떤 사람보다 더 잘 알려져 있는 경우들이 있다. "하나"라고 할 때 이는 물리적인 실재가 아닌 추상적인 것이나 이의 존재를 인정하지 않을 수 없다. 이러한 상황에서 적어도 아직 이러한 존재의 실재가 문자 그대로 증명되지는 않았을 망정, 그의 필요성은 어쩔 수 없다고 보아야 한다. 여기서 오캄(11)이 지적한대로 "필요없이 개체의 수를 증가 시켜서는 아니된다."는 것을 염두에 두어야 하겠다. 그러나 필요한 개체를 받아들어야만 하고 그 중에 집합도 포함된다고 보는 것은 주지의 사실이다. 이러한 여러 존재론적 논의를 벗어나는 방법으로도 각

(9) universe of discourse
(10) LAO TZU TAO TE CHING Penguin classics, Trans by D. C. LAU 1963 pp. 147-162
(11) Ockham's Razor "Entities should not be multiplied without necessity".

성질에 논쟁의 범위를 확정하는 것은 절대로 중요하다. 그런 의미에서 밴의 그림에서도 논쟁의 범위를 확정하여야 한다. 그러면 전칭 긍정, 전칭 부정, 특칭 긍정, 특칭 부정을 살펴 본다.

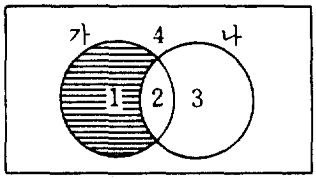
Ⅰ. 모든 가는 나다.

$\text{가} \cap \text{나}^{\text{보}} = \phi$

$(\text{가} \setminus \text{나} = \phi)$

즉 $1 = \phi$이라는 것으로 나타낸다.

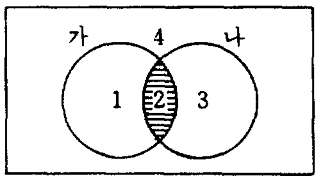
전칭 긍정 [12]



Ⅱ. 모든 가는 나가 아니다.

$\text{가} \cap \text{나} = \phi$

전칭 부정

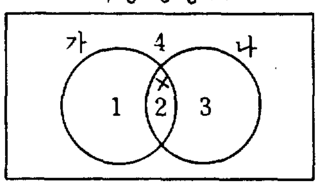


즉 $2 = \phi$이랴는 것으로 나타낸다.

Ⅲ. 어떤 가는 나이다.

$\text{가} \cap \text{나} \neq \phi$

특칭 긍정 [13]



즉 $2 \neq \phi$이라는 것으로 나타낸다.

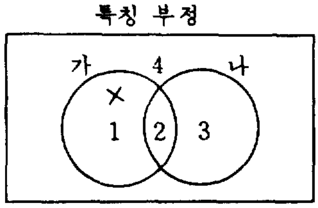
Ⅳ. 어떤 가는 나가 아니다.

$\text{가} \cap \text{나}^{\text{보}} \neq \phi$

$\text{가} \setminus \text{나} \neq \phi)$

즉 $1 \neq \phi$로 나타난다.

특칭 부정



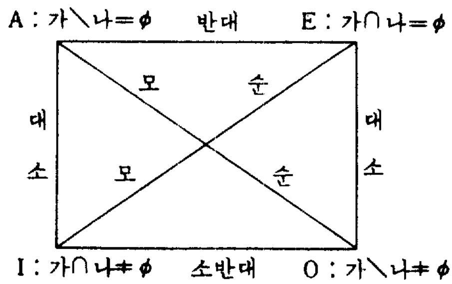
여기서 쉽게 관찰할 수 있는 것은 가 자체가 공집합인 경우에는 특칭은 불가능 하다는 것, 즉 참일 수 없다는 것은 주의하여야 할 점이라고 보아야 겠다. 그러나 전칭은 가가 공집합이어도 참일 수 있다. 이 것이 1)의 삼단논법을 참이 불가능하게 하는 것이다. 그래서 물론 가가 공집합이 아닌 경우에는 전통 논리인 삼단 논법에서 말한대로 타당하다는 것도 받아들어야 한다. 그래서 가가 공집합이 아니라는 것만을 전제하면 종래의 삼단논법

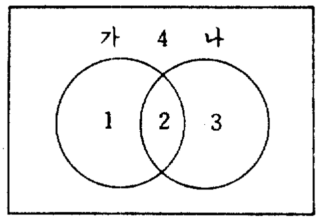
(12) 금을 그은 부분은 공집합이라는 것이다.

(13) X는 공집합이 아니라는 것 즉 요소가 있다는 것

과 기호 논리의 차이는 없다고 보아진다. 따라서 4)에 의하여 모든 삼단논법의 유형의 타당 여부가 가려질 수 있다.

다음은 대당 관계를 살펴본다.





명제에 정량이 고려된다고 하는 것은 주어의 수가 고려된다고 말할 수 있다. 그래서 여러가지의 논의가 있으나(14) 모델을 생각하여 보면 정량과 대당관계를 다른 각도로 볼 수 있다고 생각이 된다. 주어가 하나의 개체로 되어 있을 때에는 정량에 의한 변화가 없다. 즉 "현미대통령"이나 "모든 현미대통령"이나 "어떤 현미대통령"이나 같기 때문이다. 이 경우는 |가|=(15)1 인 경우이다. 또 |가|=φ인 경우 즉 주어의 수가 영인 경우 즉 개체의 수가, 없는 경우에도 마찬가지로 정량의 변화에 의하여 진리치가 변하지 않는다. 따라서 주어의, 정확히 원소의 수가 둘 이상일 때 정량이 문제가 된다. |가|=2인 경우를 생각하여 본다.

가={ㄱ, ㄴ}

경우1. ㄱ이 나이다.
　　　ㄴ이 나이다.

경우2. ㄱ이 나이다.
　　　ㄴ이 나가 아니다.

경우3. ㄱ이 나가 아니다.
　　　ㄴ이 나이다.

경우4. ㄱ이 나가 아니다.
　　　ㄴ이 나가 아니다.

이들을 각각 전칭 긍정, 전칭 부정, 특칭 긍정, 특칭 부정의 경우에 어느 것이 참인 가를 살펴 본다.

전칭긍정 : 경우1

전칭부정 : 경우4

---

(14) 蘇 興烈 「論理와 思考」 梨花女子大學校 出版部 pp. 149-169

(15) 집합 가의 원소의 수

특칭긍정 : 경우1, 2, 3

특징부정 : 경우2, 3, 4

다음은 가의 원소가 ㄱ, ㄴ, ㄷ인 경우

즉 가={ㄱ, ㄴ, ㄷ}인 경우를 생각하여 본다.

경우 1. ㄱ이 나다
ㄴ이 나다
ㄷ이 나다

경우 2. ㄱ이 나다
ㄴ이 나다
ㄷ이 나가 아니다.

경우 3. ㄱ이 나다.
ㄴ이 나가 아니다.
ㄷ이 나다.

경우 4. ㄱ이 나가 아니다.
ㄴ이 나다.
ㄷ이 나다.

경우 5. ㄱ이 나다.
ㄴ이 나가 아니다.
ㄷ이 나가 아니다.

경우 6. ㄱ이 나가 아니다.
ㄴ이 나다.
ㄷ이 나가 아니다.

경우 7. ㄱ이 나가 아니다.
ㄴ이 나가 아니다.
ㄷ이 나다.

경우 8. ㄱ이 나가 아니다.
ㄴ이 나가 아니다.
ㄷ이 나가 아니다.

이들이 각각 전칭긍정, 전칭부정, 특칭긍정, 특칭부정의 경우에 어느 것이 참인가를 살펴 본다.

전칭긍정 경우 1

전칭부정 경우 8

특칭긍정 경우1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

특칭부정 경우 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

이렇게 여러 경우들을 관찰할 수 있다. 여기서 우리가 쉽게 알 수 있는 것은 전칭 긍정과 특칭 부정의 모순 관계와 전칭 부정과 특칭 긍정의 모순 관계를 쉽게 관찰할 수 있다. 그래서 반대 관계와 모순 관계의 구분을 분명히 살펴볼 수가 있다. 모순 개념과 반대 개념의 혼선은 대체로 논쟁의 범위를 고려하지 않는데에서 생기는 것으로 간주된다. 흰 것의 반대 개념인 검은 것을 모순 관계로 보는 것은 의식적이던 무의식적이던 논쟁의 범위를 단지 흰 것과 검은 것 만으로 생각하는데서 오는 것이다. 여기서 분명히 하여 두어야 하는 것은 만약에 논쟁의 범위를 검은 것과 흰 것만으로 한정한다면 이른바 흑백논리[16] 도 잘못이 없다는 것이다. 왜냐면 여기에는 흑이 아니면 백이어서 모순 개념이면서 동시에 반대 개념이 되기 때문이다. 우리는 논쟁의 범위를 흑백에만 국한시키지 않기 때문에 반대 개념이 곧 모순 개념이 되지는 않는다. 여기 정량에서도 가의 원소의 수가 하나인 경우에는 모순 관계가 곧 반대 관계가 되고 대소 관계가 곧 동일 관계가 된다는 것을 알 수 있다. 그래서 여기서도 논쟁의 범위가 결정적인 역할을 하는 것을 알 수 있다.

삼단논법의 오류라면 주어의 원소의 수가 영일 때를 생각하지 않았다는 것이다. 따라서 주어의 원소의 수가 영이 아니다라는 조건만 첨부하면 아무런 문제도 생기지 않는다. 다시 삼단 논법 측에서 이야기 한다면 주어의 원소가 영인 경우는 일상에서 보기 드물기 때문에 문제가 없지 않냐고 할 수 있을 것이다. 그러나 여기서 반대로 그렇기 때문에 그러한 오류가 범하여질 가능성 또한 크다는 것을 지적하여 두어야 겠다. 예를 주어의 원소의 수가 영이 아닌 경우들 만을 들어서 설득이 되었기 때문에 그것을 주어의 원소가 영인 경우에 적용하였을 때 의심할 것 없이 설득되고 말기 때문이다. 여기에서 우리는 기호 논리가 얼마만큼 논리학 발전에 공헌하였는가를 쉽게 관찰할 수 있다.

---

(16) 黒白論理 : 이러한 것을 例로 들어서 形式 論理의 限界인 양하는 것은 形式論理 自體의 잘못된 理解라고 보아야 한다. 단지 사고의 폭이 좁다는 식으로 쓰인다고 봄이 타당하다.

참 고 문 헌

朴 鍾鴻「一般論理學」博英社 1980. 8

蘇 興烈「論理와 思考」梨花女子大學 出版部 1979. 6

蘇 光熙 · 金正善「記號論理學」法文社 1980. 2

姜 在倫「新論理學」大旺社 1981. 3

呂 塡根「現代論理學」大英社 1980. 3

韓國哲學會「哲學」第十五輯 1981

李 建源「多數 言語 狀況에서의 意味論」尚潮社 1980. 12

金 俊燮「改稿 論理學」正音社 1976. 2

Benacerraf, Paul and Hilary Putnam(eds)

Philosophy of Mathematics; selected readings Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1964

Bernays, Paul

"A system of axiomatic set theory" *The Journal of Symbolic Logic* 2 65-77 1937～1954

Boole, George

"The calculus of logic", *The Cambridge and Dublin Mathematematical Journal* 3 183-198

Church, Alonzo

Introduction to Mathematical Logic Princeton Univ. Press Princeton, New Jersey, vol. 1.

Cohen, Paul

"The independence of the continuun hypothesis" *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A.* 1963. 50, 1143-1148; Ⅱ 1964 51, 105-110

Craig, William

"Three uses of the Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory and proof theory" *J. S. L* 269-285 1957 "Bases for first-order theories and subtheories", *JSL* 25 97-142 1960 "An implicit definition of satisfaction n-th order theory" *JSL* 28, 301; abstract of papers presented at the 28 December 1963 session of a meeting of the Association for Symbolic Logic

Davis Martin(ed)

The undecidable. Basic papers on undecidable propositions, unsoluable problms and computable functions Raven Press Hewlett. N. Y. 1965

Fränkel, Abrahan A.

Einleitung in die Mengenlehre 2nd Ed Springer, Berlin 1923

Fränkel, Abraham A and Yehoshua Bar-Hillel

Foundations of set theory 1958 North-Holland Amsterdam

Frege, Gottlob

Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens (Halle) 1879 *Die Grundlagen der Arithmetic, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* Breshau 1884

"Funktion und Begriff." Vortrage gehalten in der Sitzung vom 9 Januar 1891 der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft. Jena 1891.

"Über Sinn und Bedeutung", *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik;* new series 100, 25-50 1892

Gruntgesetze der Arithmetik, begriffschriftlich abgeleitet Jena, vol. 1 ;1892 vol 2. 1903

"Letter to Russell" 1902 *From Frege to Gödel* Harvard University Press Ed. Heijenoort, Jena. 1967

Gentzen, Gerhard

"Untersuchung über das logische Schliessen" *Mathematische Zeitschrift* 39, 176-210, 405-431, 1934

Gödel, Kurt

"Über die Vollständigkeit des Logikkalküls" (thesis), Univerity of Vienna.

Über formel unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systemm I, *Monatschafte für Mathematik und Physik* 38 173-198 1931

"Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis" Proceedings of the National academy of sciences 24. 556-557 1938

Henkin, Leon

"The completeness of the first-order functional calculus" *JSL* 14, 159-166 1949

Herbrand, Jacques

Logical Writings ed. by Warren Goldfarb Reidel Dordrecht

Heytung, Arend

Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie Springer, Berlin 1934

Hintikka, K. Jaakko J.

"Form and content in quantification theory" Acta philosophica fennica 8 7-55 1955

Kleene, Stephen Cole

Introduction to metamathematics Van Nostrand NY 1952

Kneale, William, and Martha Kneale

The development of logic 1962 Oxford University Press

Lukasiewicz, Jan

Elements of mathematical Logic English translation of lukasiewicz 1958 by Olgierd Wojtasiewicz PWN & Pergamon, Oxford, MacMillan, N, Y.

Peirce, Charles Sanders

Collected Parers of Charles Sanders Peirce ed by Charles Hartshorne & Paul Weiss. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, vol3. 1933

Quine, Willard Van Orman

Mathematical Logic 1940 Harvard University Press Cambridge, Massachusetts 1940 revised ed. 1951. *Set theory and its logic* Harvard University Press Cambridge Massachusetts 1963

Ramsey, Frank Plumpton

The foundations of mathematics and other logical essays ed. by Richard Bevan Braithwaite 1931

Wang, Hao

A survey of mathematical logic 1962 Science Press Peking

Whitehead, Alfred North & Russell, Bertrand

Principia Mathematica Cambridge Press, Cambridge England vol 1, 1910. vol 2, 1912. vol3, 1913, 2nd ed vol1, 1925, vol2, 1927. vol3, 1927.

Zermelo, Ernst

"Untersuchungen uber die Grundlagen der Mengenlehre I" *Mathematische Annalen* 65 261-281 1908.

Chang. C. C. and Keisler H. Jerome

Model Theory North-Holland Publishing Company 1973

Willian Kon-Won Lee; "Semantics in translation."

Abstract presented at ASL Spring Meeting 1981 at Milwaukee Wisconsin U. S. A.

부 록 I

I. 명제 계산의 자연적 연역법

추리 법칙

1. 前件肯定

가⊃나
가
―――
∴나

2. 移行性

가⊃나
나⊃다
―――
∴가⊃다

3. 后件否定

가⊃나
∼나
―――
∴∼가

4. 選言論法

가∨나
∼가
―――
∴나

5. 兩刀論法

(가⊃나)∧(다⊃라)
가∨다
―――
∴나∨라

6. 否定兩刀論法

(가⊃나)∧(다⊃라)
∼나∨∼라
―――
∴∼가∨∼다

7. 單化

가∧나
―――
∴가

8. 連言

가
나
―――
∴가∧나

9. 合

가
―――
∴가∨나

10. 矛盾[17]

가
∼가
―――
∴나

치환 법칙

11. 드 몰간

∼(가∧나)≡(∼가∨∼나)
∼(가∨나)≡(∼가∧∼나)

12. 交換法則

(가∨나)≡(나∨가)
(가∧나)≡(나∧가)

13. 聯合

[가∨(나∨다)]≡[(가∨나)∨다]
[가∧(나∧다)]≡[(가∧나)∧다]

14. 分配法則

[가∧(나∨다)]≡[(가∧나)∨(가∧다)]
[가∨(나∧다)]≡[(가∨나)∧(가∨다)]

15. 二重否定

가≡∼∼가

16. 傳位

(가⊃나)≡(∼나⊃∼가)

17. 含言

(가⊃나)≡(∼가∨나)

18. 同値

(가≡나)≡[(가⊃나)∧(나⊃가)]
(가≡나)≡[(가∧나)∨(∼가∧∼나)]

---

(17) 矛盾은 1981年春 筆者의 서울大 一般論理 講義에서 처음으로 使用하였다. 1980年 蘇光熙 교수와의 討論에 감사드리고, 강의 시간에 적극적으로 討論에 참석하여 준 학생들에게 감사드린다.

19. 流出

〔(가∧나)⊃다〕≡〔가⊃(나⊃다)〕

20. 恒眞

가≡(가∨가)

가≡(가∧가)

Ⅱ. 제일술어 계산의 연역법

'$\psi\mu$'는 명제나 명제 함수다. '$\psi\nu$'는 '$\psi\mu$' 속의 모든 정량되지 않은 μ를 ν로 바꾸어 쓴 것이고, 따라서 모든 정량되지 않은 μ의 자리에 ν가 정량되지 않은 상태로 있게 된다.

만약 $\psi\mu$에 μ가 정량되지 않은 것이 없거나 μ와 ν가 같은 변수이면 $\psi\nu$는 같은 형이 된다.

1. 全稱例化 UI $\dfrac{(\mu)\ \psi\mu}{\therefore\ \psi\nu}$

2. 特稱普遍化 EG $\dfrac{\psi\nu}{\therefore\ (\exists\mu)\ \psi\mu}$

3. 特稱例化 EI (∃μ) ψμ

$$\dfrac{(\exists\mu)\ \psi\mu}{\begin{array}{|l} \rightarrow \psi\nu \\ \vdots \\ P \\ \hline \end{array}}$$
$$\therefore P$$

단 : 변수 ν는 p나 '$\psi\nu$' 이전의 공식에 정량되지 않은 채로 나타나지 않는다.

4. 全稱普遍化 UG $\dfrac{\psi\nu}{\therefore (\mu)\ \psi\mu}$

단 : 변수ν는 (μ) $\psi\mu$나 $\psi\nu$가 그 범위속에 있는 어떤 가정에도 나타나지 않는다.

부 록 Ⅱ

집합론 요약 Ⅰ [18]

기본개념 : ∈ "~이 ~에 속한다."

"~은 ~의 원소이다."

변 수 : A, B, C, ……; $\underset{\bullet}{a}$, b, c, …; A_0, A_1, A_2, …;

a_0, a_1, a_2, …; B_0, B_1, B_2, …, …, b_0, b_1, b_2, …, etc.

---

(18) 이 집합론은 1981년 1학기 서울대 철학과의 필자의 기호논리학 시간에 강의되었다. 적극적으로 토론에 참여하여 주었던 金素暎 外 여러 학생들에 사의를 표한다. 여기서 소개된 체제는 Berkeley 대학교 John L. Kelley 교수의 것이다. 당시 필자와 같이 토론하였던 Ms Eugene Bersano, Mr. J. Prausa, Mr. Job Zeyce 등의 우의에 다시 감사한다.

외연의 공리 (Axiom of extension)

$A=B \leftrightarrow \forall_x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$

정의 A는 B의 부분집합이다.

($A \subset B$이거나 $B \supset A$) $\leftrightarrow \forall_x (x \in A \rightarrow x \in B)$

A는 B의 진부분집합이다.

$(A \subsetneqq B) \leftrightarrow A \subset B$이고 $A \neq B$

정리 $A \subset B$이고 $B \subset A \leftrightarrow A=B$

분리의 공리 (Axiom of specification)

모든 *wff* $\psi_{(x)}$와 집합 A에 대하여 다음과 같은 집합 B가 있다.

$\forall_x\ x \in B \leftrightarrow x \in A$이고 $\psi_{(x)}$: $B=\mathrm{df}\{x \in A : \psi_x\}$

즉 $x \in \{x \in A : \psi_{(x)}\} \leftrightarrow x \in A$이고 $\psi_{(x)}$

정리 전체 집합은 없다. 즉 $\forall_A (\neg \forall_x\ x \in A)$

초정리 (Metatheorem)

$\psi_{(x)} \rightarrow x \in A$이고 $\psi_{(x)} \rightarrow x \in B$이면

$\{x \in A : \psi_{(x)}\} = \{x \in B : \psi_{(x)}\}$

그래서 $\psi_{(x)} \rightarrow x \in A$인 집합 A가 적어도 하나 이상 있으면 $\{x : \psi_{(x)}\}$로서 $\{x \in A : \psi_{(x)}\}$를 분명히 표시할 수 있다.

무한의 공리 (Axiom of ∞)

이러 이러한 집합이 있다는 것으로 다음과 같이 무한히 쓰일 수 있다.[19]

$\exists \phi$ 그리고 $\phi=_{\mathrm{df}} \{x : x \neq x\}$

$\exists A_0$그리고 $A_0=\{\phi\}$

⋮

정리 공집합은 유일하다. 즉 B가 $\forall_x\ x \notin B$이면 $B=\phi$이다.

짝의 공리 모든 a, b에 대하여 $a \in A$이고 $b \in A$인 집합 A가 있다.

정의 $\{a, b\} = \{x : x=a$이거나 $x=b\}$

하나짜리 $a=\{a\}$는 다음과 같이 정의된다. $\{a\}=\{a, a\}$

정리 $x \in \{a\} \leftrightarrow x=a$

정리 $\phi \neq \{\phi\}$ 그리고 $\{\phi\} \neq \{\phi, \{\phi\}\}$

정리 $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\} \rightarrow a=x$ 그리고 $b=y$

합집합의 공리 (Axiom of unions)

---

(19) 이는 집합의 존재를 인정하자는 것이다.

$\forall \mathfrak{A}\ \exists U\ (A\in\mathfrak{A} \to A\subset U)$

정의 집합의 집합 $\mathfrak{A}$의 원소들의 합집합 $\cup\{A : A\in\mathfrak{A}\}$는 $\{x : x\in A$이며 A는 $\mathfrak{A}$의 한 원소이다$\}$

정리 $\cup\{A : A\in\phi\}=\phi$ 이고 $\cup\{A : A\in\{B\}\}=B$

정의 $A\cup B=\{x : x\in A$이거나 $x\in B\}$

$A\cap B=\{x : x\in A$이고 $x\in B\}$

그리고 $A\backslash B=\{x : x\in B$ 그리고 $x\notin B\}$

주의 $\psi_{(x)}$면 $x\in B$일 경우 우리는, $\{x : \psi_{(x)}\}$를 쓴다. 이 경우 $x\in\{x : \psi_{(x)}\}\leftrightarrow\psi_{(x}$

정리 $\cup$는 교환성, 연합성, 재귀동치이다.

ϕ은 $\cup$—동치이다.

$\cap$은 교환성, 연합성, 재귀동치이다.

ϕ은 $\cap$—동치가 아니다.

정의 ψ—재귀동치 : $\forall_A\ \psi_{(A,A)}=A$

ψ동치 : $\forall_A\ \psi_{(A,\phi)}=A$ 그리고 $\forall_A\ \psi_{(\phi,A)}=A$

정리 $\cup$은 $\cap$에 분배성을 갖는다.

$\cap$은 $\cup$에 분배성을 갖는다.

정리 $A\subset B\leftrightarrow A\cap B=A\leftrightarrow A\cup B=B$

정리 $A\backslash(A\backslash B)=A\cap B$

정리 $A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$ (드 몰간, 기초)

정리 $A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$ (드 몰간, 기초)

정리 $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)\leftrightarrow C\subset A$

정리 $\cup\{A : A\in\mathfrak{A}\}=\cup_{A\in\mathfrak{A}}\ A=\{x : x\in A$이고 A는 $\mathfrak{A}$의 원소$\}$

$\mathfrak{A}\neq\phi$ 면 $\cap\{A : A\in\mathfrak{A}\}=\cap_{A\in\mathfrak{A}}\ A=\{x : x\in A$이고 A는 $\mathfrak{A}$의 원소$\}$

정리 $A\in\phi$인 경우 $x\in A\leftrightarrow x\in B$인 B는 없다.

정리 $A\subset B\to\cup_{A\in\mathfrak{A}}\ A\subset\cup_{B\in\mathfrak{B}}\ B$

정리 $\phi\neq\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}\to\cap_{A\in\mathfrak{A}}\ A\supset\cap_{B\in\mathfrak{B}}\ B$

정리 $\mathfrak{A}\neq\phi$, $X\backslash\cup_{A\in\mathfrak{A}}\ A=\cap_{A\in\mathfrak{A}}\ (X\backslash A)$와 그 쌍대(드 몰간)

부분집합의 공리 (Axiom of subset)

모든 집합 A에 대하여 $B\subset A$면 $B\in U$인 집합 U가 있다.

정의 A의 冪集合(power set)은 $\mathfrak{P}_{(A)}=\{B : B\subset A\}$

문제 $\mathfrak{P}_{(x)}\cap\mathfrak{P}_{(y)}=\mathfrak{P}_{(X\cap Y)}$ 그리고 $\mathfrak{P}_{(X)}\cup\mathfrak{P}_{(y)}\subset\mathfrak{P}_{(x,y)}$ 어떤 조건에서 이 含意가 等式이 되는가?

문제 $\cap_{A\in\mathfrak{P}(x)}\ A=?$ $\cup_{A\in\mathfrak{P}A}\ A=?$

정리 $X\cap Y=\phi$ 면 $\mathfrak{P}(X\cup Y)$와 $\mathfrak{P}_x\times\mathfrak{P}_y$ 는 1—1 대응관계이다.

정의 次數 $(a,\ b)$는 $\{\{a\},\ \{a,\ b\}\}$이다.

정리 $(a,\ b)\subset\mathfrak{P}(\{a,\ b\})$: $(a,\ b)=(x,\ y)\leftrightarrow a=x$ 이고 $b=y$

정의 $(a,\ b)$의 첫 원소$=a$, $(a,\ b)$의 마지막 원소$=b$

$X\times Y=\{(a,\ b)\ a\in X$ 이고 $b\in Y\}$

문제 $\times$는 $\cup$에 분배되는가?

정리 $(A\cap B)\times(X\cap Y)=(A\times Y)\cap(B\times Y)$

문제 $\times$는 $\setminus$에 분배되는가?

문제 $A\times B=C\times D$ 면 언제나 $A=C$ 이고 $B=D$ 인가?

정의 **관계** $R=_{\mathrm{df}}\{(a_0, b_0),\ (a_1, b_1),\ (a_2, b_2),\ \cdots\ (a_n, b_n)\}$

그리고 $a_i\in A$ 그리고 $b_i\in B$

合成 (composition) $C=_{\mathrm{df}}\ A\times B$

관계의 裏 $R^{-1}=_{\mathrm{df}}\{(b_0, a_0),\ (b_1, a_1),\ \cdots\ (b_n, a_n)\}$

$R=\{(a_0, b_0),\ (a_1, b_1),\ \cdots,\ (a_n, b_n)\}$ 일 때

정리 合成은 聯合性이며, R과 S가 관계이면

$(R\cdot S)^{-1}=S^{-1}\cdot R^{-1}$ 이 成立한다.

정의 $R[A]=[\{y : \exists x\,(x\in A$ 이고 $(x, y)\in R\}$

R의 定域$=\cup\cup R$

R의 値域$=\{(\cup\cup R)\setminus(\cap\cap R)\}\ \cup(\cap\cup R)$

정리 R이 관계면 $R\subset R$의 定域$\times R$의 値域

정리 R과 S가 관계면 $(R\cdot S)[A]=R(S[A])$

정리 R이 同値關係 (즉 移行性, 對稱性, 再歸性)$\leftrightarrow$서로 素인 族C 즉 $R=\bigcup_{C\in\mathfrak{C}} C\times C$ 이 있다.

정의 f는 함수$\leftrightarrow f$는 관계이고 f의 정역의 모든 x에 대하여, $(x, y)\in f$ 인 y가 있다. 이 유일한 y는 $f_{(x)}$ 또는 f_x로 쓰인다.