

혼돈 동기화

김영태*

아주대 분자과학기술학과, 수원 442-749

(2003년 1월 8일 받음)

혼돈 동기화가 발견되고 공학적 응용 가능성이 대두되면서 최근 이에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 이 논문에서는 혼돈 동기화의 기본적인 성질과 혼돈 동기화를 얻는 다양한 방법에 대하여 살펴보고자 한다. 아울러 비선형 동역학을 이용한 안정성 분석을 통하여 혼돈 동기화 및 비동기화의 메커니즘을 밝히고 비동기화 과정에서 발생하는 다양한 쌍갈림 현상을 다룬다. 끝으로 혼돈 동기화를 응용한 비밀통신(secure communication)에 대하여 논의한다.

PACS numbers: 05.45, 05.45.G, 05.45.V

Keywords: 비선형 동역학, 카오스, 동기화, 결합 동역학계

I. 서 론

1960년대 미국의 기상학자인 로렌츠(Lorenz)에 의하여 간단한 비선형 미분방정식에서 혼돈(chaos)이 발견된 이후 [1] 비선형 동역학계(nonlinear dynamical system)에 대한 연구에 큰 진전이 있었다 [2]. 혼돈은 미분방정식과 같이 주어진 규칙이나 질서를 따라 발생하지만 겉보기에 무질서해 보인다(그림 1). 혼돈은 초기조건에 대한 민감성(sensitivity to initial conditions), 즉 나비효과(butterfly effect)를 보이기 때문에 장기적인 예측이 불가능하다고 알려져 있다. 그 이유는 초기조건의 사소한 차이가 시간에 따라 지수적으로 증가하기 때문이다. 초기조건의 차이가 지수함수적 증가를 보일 때 이 지수(exponent)를 리아푸노프 지수(Lyapunov exponent)라고 부르고 혼돈의 경우 리아푸노프 지수는 양의 값을 가진다 [2].

초기조건에 대한 민감성 때문에 혼돈계를 결합시켜 혼돈 동기화를 얻을 수 없다고 생각했다. 그러나 1990년 Pecora 등에 의해 혼돈 동기화가 가능함이 실험과 이론으로 밝혀지면서 [3] 혼돈 동기화에 대한 연구가 활발히 진행되어 동기화 메커니즘, 다양한 동기화 방법 등이 규명되었다 [4,5]. 역사적으로 혼돈 동기화는 pecora 등의 발견보다 훨씬 이전인 1983년 결합 혼돈계 모델에서 발견되었음이 나중에 알려지게 되었다 [6].

그림 1의 로렌츠 방정식과 같은 일부 혼돈계에서 일어나는 혼돈 동기화는 스스로 주기운동을 유지하는 비선

형 진동자 결합계의 동기화와 유사성을 가진다고 볼 수 있다 [5]. 즉 위상은 주기운동 진동자처럼 시간에 따라 균일하게 회전하지만 진폭이 불규칙하게 변화하는 진동으로 혼돈 신호를 생각할 수 있다. 그림 1에서 보듯이 혼돈계의 신호가 불규칙하지만 주기적으로 진동하는 것을 볼 수 있다. 따라서 혼돈계의 위상의 각속도가 혼돈계의 주기라고 여겨지는 특성 시간(characteristic time)을 결정하고 다른 혼돈계와의 약한 결합이나 외부 주기 힘에 의해 이 특성 시간이 영향을 받게 되어 동기화가 일어날 가능성을 생각해 볼 수 있다. 따라서 결합 혼돈계에서도 결합 주기운동계에서와 같은 진동수 잠김(frequency

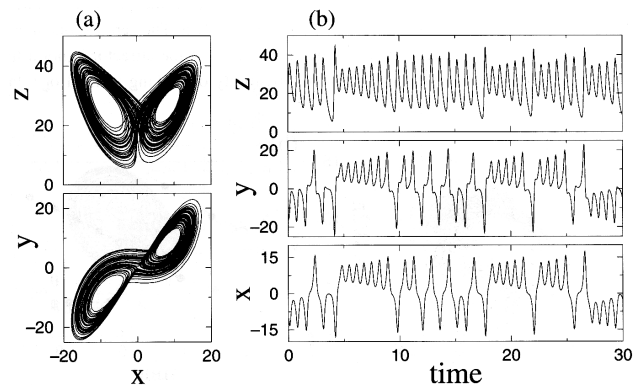


그림 1. 간단한 비선형 로렌츠 방정식 $dx/dt = 10(y - x)$, $dy/dt = 28x - y - xz$, $dz/dt = -(8/3)z + xy$ 에서 나타나는 혼돈. (a) (x, y) 와 (x, z) 평면으로 투사시킨 위상 궤적. 나비 모양의 흥미로운 혼돈의 이상한 끌개(strange attractor)가 나타난다. (b) 변수 x, y, z 의 시계열(time series). 장기적인 예측이 어려운 불규칙한 혼돈 신호가 발생한다.

*E-mail: ytkim@ajou.ac.kr

locking) 또는 위상 잠김(phase locking)을 통해 동기화가 가능해진다. 결합 주기운동계나 강제 구동 진동자에서의 동기화에 대해서는 앞서의 논문을 참고하기 바란다 [7].

자연에는 혼돈을 보이는 다양한 예가 존재한다. 비행기가 고속으로 비행할 때 날개 주위에 생기는 난류(turbulence)도 혼돈의 한 예이다. 난류는 비행기의 속도를 감소시키고 안정성을 깨뜨리기 때문에 제거해야 할 성질의 것이다. 반면 혼돈은 계의 특성을 향상시키는 바람직한 특성이기도 하다. 예를 들어 두 화합물의 섞임(mixing)의 경우 화합물의 주입 속도를 조절하여 혼돈 섞임(chaotic mixing)이 일어나게 만들면 두 화합물의 비가 공간적으로 좀더 균일하게 된다.

혼돈은 또한 장기적인 예측이 불가능하기 때문에 혼돈 신호에 음성 등과 같은 통신 신호를 섞어 송신하면 도청이 불가능하다. 혼돈 동기화 방법이 정립될 수 있다면 송신된 신호에서 원래 혼돈 신호만을 제거하여 통신 신호를 복원할 수 있을 것이다. 혼돈 동기화를 이용한 비밀통신 가능성은 혼돈 동기화가 발견된 직후부터 예견이 되었고 현재 많은 연구가 이루어져 있다 [21-24]. 비밀통신이 한 예이긴 하지만 혼돈 동기화의 다양한 공학적 응용을 생각할 수 있어 앞으로 더 많은 연구가 이루어지리라 예상된다.

II 절에서는 혼돈 동기화의 일반적인 특성 및 동기화를 시키는 여러 방법에 대하여 소개한다. 혼돈 동기화에서는 완전 동기화 이외에 일반 동기화(generalized synchronization) 또는 위상 동기화(phase synchronization)가 가능하고 두 동기화의 차이에 대해 살펴본다. III 절에서는 두 혼돈 본뜨기를 결합한 계를 이용하여 혼돈 동기화 및 비동기화 메커니즘을 소개한다. 비선형 동역학의 안정성 분석을 통해 혼돈 동기화 메커니즘을 이해하고자 한다. 마지막으로 IV 절에서는 응용으로 혼돈 동기화를 이용한 비밀통신에 대하여 간단히 설명하고자 한다.

II. 혼돈계의 동기화 및 동기화 방법

다음의 그림을 통하여 혼돈 동기화의 특징에 대하여 설명한다. 그림 2(a)에는 동일하지 않은 두 개의 분리되어 있는 가상적인 혼돈계가 만드는 혼돈 신호 x_1, x_2 의 시계열이 각각 점선과 실선으로 표시되어 있다. 그림에서 보면 각 시계열의 극대값(local maxima)이 21개와 23개로 두 계의 주기가 다름을 알 수 있다. 그림 2(b)에는 (x_1, x_2) 평면에서의 이 두 혼돈신호의 위상 궤적이 표시되어 있다. 두 신호 사이에 상관 관계가 없기 때문

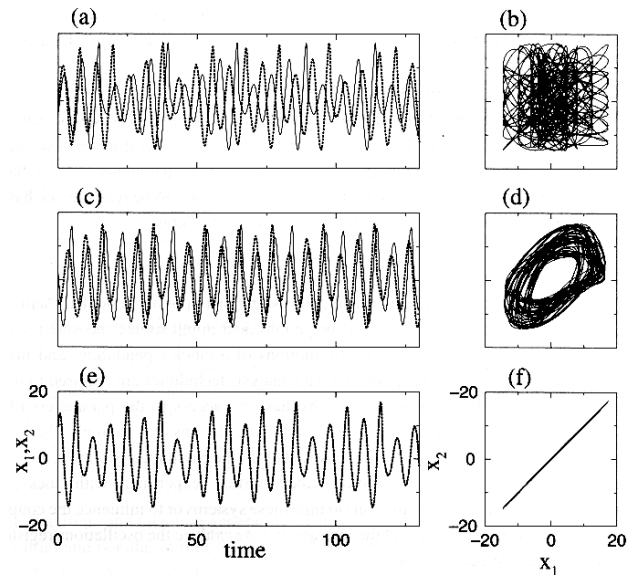


그림 2. 약간 다른 특성을 지닌 두 혼돈계에서 일어나는 혼돈 동기화. (a)와 (b): 두 혼돈계가 분리되어 있는 경우. 혼돈 신호의 시계열 주기가 다르고 상관 관계가 없어 위상 궤적이 전체 공간에 퍼져있다. (c)와 (d): 두 혼돈계를 약하게 결합시킨 경우. 시계열의 주기가 같아지지만 아직 진폭은 다르다. 이 때문에 위상 궤적이 퍼져있는 원형 구조를 가진다. (e)와 (f): 두 혼돈계를 적당히 강하게 결합시킨 경우. 완전한 혼돈 동기화가 이루어져 시계열 신호의 주기와 진폭이 완전히 동일하다. 그러나 시계열은 분리되어 있을 때와 같이 여전히 불규칙하다. 시계열이 완전히 일치하기 때문에 위상 궤적은 45° 경사선이 된다.

에 위상 궤적이 전체 공간에 퍼져 있게 된다. 이 두 혼돈계를 약하게 결합시킨 후 얻은 신호의 시계열과 위상 궤적이 각각 그림 2(c)와 2(d)에 표시되어 있다. 우선 두 계의 주기(또는 위상)가 일치하게 됨을 알 수 있다. 따라서 위상 궤적이 원형 구조를 보인다. 그러나 진폭이 다르기 때문에 위상 궤적이 다소 퍼져 있음을 볼 수 있다. 이제 두 혼돈계를 적당히 강하게 결합하면 그림 2(e)와 2(f)에서 보는 것처럼 $x_1 = x_2$ 가 되는 완전한 혼돈 동기화를 얻게 된다. 따라서 두 변수가 여전히 혼돈 상태에 있음에도 불구하고 완전한 상관 관계를 갖기 때문에 위상 궤적이 정확히 45° 경사선이 된다.

결합 혼돈계에서 그림 2(e)와 2(f)의 경우를 완전 동기화(complete synchronization)라고 부른다. 즉 각 혼돈계의 시계열 신호의 진폭과 위상이 완전히 일치한다. 그러나 각 신호는 여전히 불규칙하다. 그림 2(c)와 2(d)의 경우를 일반 동기화 또는 위상 동기화라도 부른다 [25]. 시계열 신호를 분석해보면 위상은 정확히 일치하지만 진폭이 다르다. 그러나 진폭 역시 일정한 규칙에 따라 상관관계를 가진다. 반면 그림 2(a)와 2(b)에서처럼 시계열 혼돈신호가 전혀 연관성이 없을 경우 비동기화되었다고 말한다.

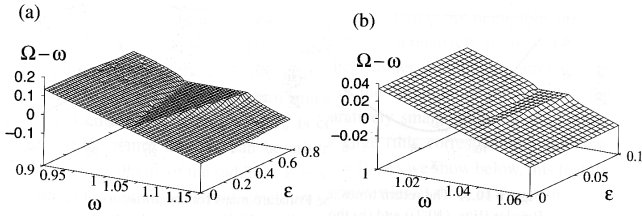


그림 3. 식 3의 강제 구동 쇄슬러계에서 일어나는 혼돈 동기화. (a) 관측된 진동수 Ω 와 외부 힘의 진폭 ε 및 진동수 ω 사이의 관계. 수평한 동기화 영역이 나타난다. (b) 매우 작은 진폭 ε 에서도 동기화가 존재함을 볼 수 있다.

결합 혼돈계에서 흔히 관찰되는 위상 동기화가 가능함을 알아보기 위하여는 우선 혼돈계의 위상의 정의가 필요하다. 주기적인 진동의 경우 진동자의 순환 궤도(limit cycle)를 따라 회전하는 변수로 위상을 정의하였고 위상은 시간에 따라 계속 증가한다. 혼돈계에서의 위상도 위상 궤적 상의 점들의 시간 변화에 따른 회전을 대표해야 하고 아울러 계산이 용이해야 한다. 그러나 혼돈계의 경우 위상의 유일한 정의는 존재하지 않는다. 위상을 정의하기 위해 혼돈계의 포앵카레 단면(Poincare section)을 생각해 보자. 포앵카레 단면은 위상공간에서 혼돈 끌개를 궤적에 수직한 면으로 절단했을 때 얻어지는 점들의 집합을 의미한다.

포앵카레 단면을 궤적이 지날 때마다 위상이 2π 씩 증가하고 시간에 선형적이라고 가정하면 위상을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\phi(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1} \quad (1)$$

이 식에서 t_n 은 단면을 n 번째 지나는 시간이다. 포앵카레 단면의 선택이 유일하지 않기 때문에 식 1의 위상 정의가 애매모호한 점이 있다. 그러나 계산이 편리하고 실용성이 높아 혼돈계에 많이 사용된다.

또는 위상궤적을 2차원 (x, y) 평면에 투영했을 경우 위상을 다음과 같이 간단히 정의하기도 한다. 이러한 위상의 정의는 로렌츠계나 쇄슬러(Rossler)계에서 사용된다 [26,27].

$$\phi = \tan^{-1}(y/x) \quad (2)$$

이외에도 실험에서 측정된 혼돈 시계열 신호의 위상을 구하는데는 힐버트 변환(Hilbert transform)을 이용한 정성적 방법이 사용되기도 한다.

이제 혼돈 동기화를 얻는 방법에 대하여 살펴보자. 우선 가장 간단한 방법으로 혼돈계에 주기적인 외부 힘을

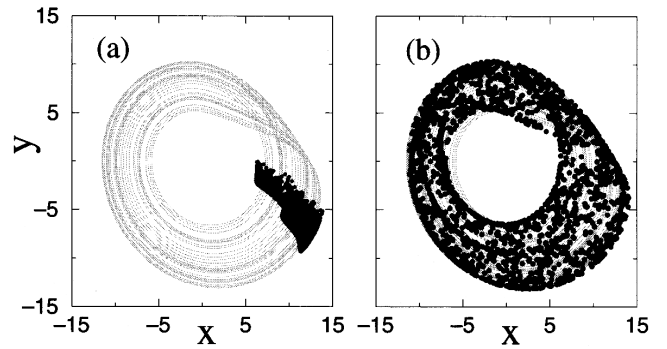


그림 4. 강제 구동 혼돈 쇄슬러계의 샘플링 단면. (a) 위상 동기화 상태($\varepsilon = 0.16, \omega = 1.04$)에서 위상이 작은 영역에 밀집되어 있다. 반면 진폭은 넓게 퍼져있다. (b) 비동기화 상태($\varepsilon = 0.16, \omega = 1.1$)에서는 위상과 진폭 모두 넓게 퍼져있다. 회색의 끌개는 외부 힘이 없을 때의 쇄슬러계가 만드는 혼돈 끌개이다.

가해 혼돈 동기화가 이루어질 때의 특성을 살펴보기로 하자. 그림 3은 쇄슬러계를 강제 구동시켰을 때 얻어지는 위상 동기화를 보여준다. 외부 힘을 가한 쇄슬러계의 운동방정식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} dx/dt &= -(y+z) + \varepsilon \cos \omega t \\ dy/dt &= x + 0.15y \\ dz/dt &= 0.4 + z(x - 8.5) \end{aligned} \quad (3)$$

그림 3(a)을 보면 강제 구동 쇄슬러계의 진동수 Ω 가 외부 힘의 진동수 ω 와 같아지는($\Omega = \omega$) 동기화 영역이 나타난다. 이 영역은 외부 힘의 크기 ε 이 클수록 넓어진다. 그림 3(b)는 진폭 ε 이 매우 작을 때의 동기화 영역을 확대한 것으로 매우 작은 외부 힘에 의하여도 동기화가 일어나는 것을 알 수 있다.

매우 작은 힘을 작용해도 혼돈계의 동기화가 일어나기를 알아보기 위하여 식 3의 위상 궤적을 외부 힘의 주기로 샘플링하여 위상 공간 (x, y) 에 표시한 것이 그림 4(a)에 있다. 동기화가 일어날 때 점들이 같은 위상의 밀집되어 있다. 반면 진폭은 끌개 전체에 퍼져 있다. 따라서 위상 동기화가 일어남이 명확해진다. 외부 힘과 혼돈계와의 동기화가 깨어지면 그림 4(b)에서처럼 샘플링한 점들이 끌개의 모든 곳에 퍼져있게 된다.

이러한 위상 동기화는 서로 다른 혼돈계를 결합하였을 때도 관찰할 수 있다. 로렌츠 방정식을 따르는 계(로렌츠계)를 쇄슬러 방정식을 따르는 계(쇄슬러계)와 흠어지기(diffusive) 결합을 통해 결합상수 k 로 다음 식과 같이 결합하였다고 하자 [28].

쇄슬러(구동계) :

$$dx/dt = -(y+z)$$

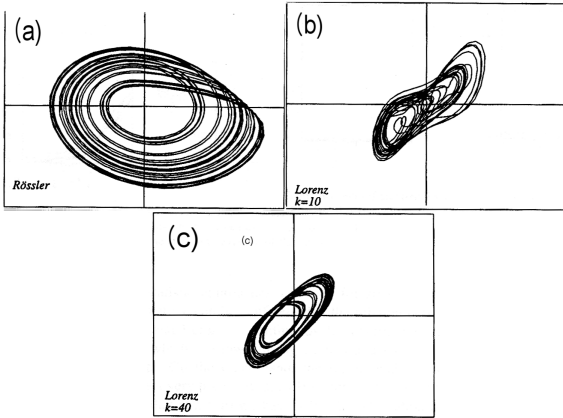


그림 5. 구동계인 뢰슬러계(a)와 반응계인 로렌츠계((b)와 (c))가 흠어지기 결합에 의해 결합했을 때 나타나는 위상궤적. (b) 결합상수 $k = 10$ 에서 동기화가 일어나지 않는다. (c) $k = 40$ 에서 위상 동기화가 일어나 로렌츠계의 궤적이 뢰슬러계의 궤적과 유사해진다.

$$\begin{aligned} dy/dt &= x + ay \\ dz/dt &= b + z(x - c) \end{aligned} \quad (4)$$

로렌츠(반응계) :

$$\begin{aligned} du/dt &= -\sigma(u - v) \\ dv/dt &= -uw + ru - v + k(y - v) \\ dw/dt &= uv - gw \end{aligned} \quad (5)$$

이 식에서 $a = b = 0.2, c = 9.0, \sigma = 10, r = 60, g = 8/3$ 이다. 그림 5는 구동계인 뢰슬러계(그림 5(a))와 $k = 10$ (그림 5(b))과 $k = 40$ (그림 5(c))일 때의 반응계인 로렌츠계의 위상궤적이다. 결합상수 $k = 10$ 에서는 두 계 사이의 동기화가 일어나지 않아 위상궤적이 많이 다르다. 즉 반응계인 로렌츠계의 궤적이 여전히 나비모양의 끌개 형태를 보인다. 그러나 $k = 40$ 으로 결합상수를 증가시키면 로렌츠계의 나비모양이 사라지고 뢰슬러계의 궤적과 유사해진다. 이때 두 혼돈계의 위상을 구해 비교해보면 같아지는 것을 알 수 있다.

이러한 예를 통하여 혼돈계의 파라미터가 다를 경우 완전 동기화가 불가능하더라도 위상 동기화가 가능함을 알 수 있다.

지금까지 살펴본 강제 구동 혼돈계, 구동-반응 결합 혼돈계에서의 혼돈 동기화 이외에도 cascading drive-response synchronization, nonautonomous synchronization, partial replacement, occasional driving, synchronous substitution 등 다양한 혼돈 동기화 방법이 존재한다 [4]. 다음 절에서는 앞서와 달리 결합 혼돈계에서 일어나는 혼돈의 완전 동기화, 위상 동기화 및 비동기화에 대하여는 알아보려고 한다.

III. 혼돈 동기화 메커니즘

혼돈 동기화 메커니즘을 알아보기 위하여 간단한 혼돈 본뜨기를 두 개 결합한 경우를 생각해 보자. 1차원의 본뜨기(map) $x(t + 1) = f(x(t))$ 가 주어지고 $t = 0, 1, 2, \dots$ 으로 시간 t 가 불연속적으로 변화한다. 혼돈을 보이는 이러한 본뜨기의 대표적인 예가 로지스틱 본뜨기 $f(x) = 4x(1 - x)$ 또는 텐트 본뜨기 $f(x) = 1 - 2|x|$ 이다.

이제 각각 변수 x, y 로 기술되는 두 개의 텐트 본뜨기를 생각해 보자. 각 변수가 혼돈 시계열을 보인다고 하고 두 계가 결합되어 있지 않으면 두 변수는 서로 독립적으로 무작위적인 변화를 한다. 상호작용을 도입하여 두 본뜨기를 결합한다고 가정하자. 두 계를 결합하는 방법에는 여러 가지가 있지만 다음 조건을 만족하는 결합을 선택한다.

(i) 두 변수가 서로 가까와 지는 상호작용- 흠어지기(dissipative) 결합-을 주도록 한다. (ii) 대칭 동기화 상태 $x = y$ 가 유지되는 상호작용을 주도록 한다.

위 두 가지 성질을 만족하는 선형 결합의 일반적인 형태는 다음 식을 만족한다.

$$\begin{pmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \end{pmatrix} = \hat{L} \begin{pmatrix} f(x(t)) \\ f(y(t)) \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix} \quad (7)$$

여기서 $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ 이다. $\alpha = \beta = \varepsilon$ 인 대칭 결합(symmetric coupling)을 생각하면 \hat{L} 이 아래와 같이 더 간단해 지고

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{pmatrix} \quad (8)$$

따라서 식 6은 식 9, 10과 같이 되어 변수 교환 $x \leftrightarrow y$ 에 대하여 완전히 대칭적이다.

$$x(t+1) = (1 - \varepsilon)f(x(t)) + \varepsilon f(y(t)) \quad (9)$$

$$y(t+1) = \varepsilon f(x(t)) + (1 - \varepsilon)f(y(t)) \quad (10)$$

이제 양(+)의 결합상수 ε 를 증가시켜가며 식 9, 10으로 기술되는 결합계의 성질을 정성적으로 조사해 보자. 극단적인 경우로 $\varepsilon = 0$ 이면 두 계는 완전히 독립적이 된다. $\varepsilon = 1/2$ 이면 한번 반복후 두 변수가 동일해지고 따라서

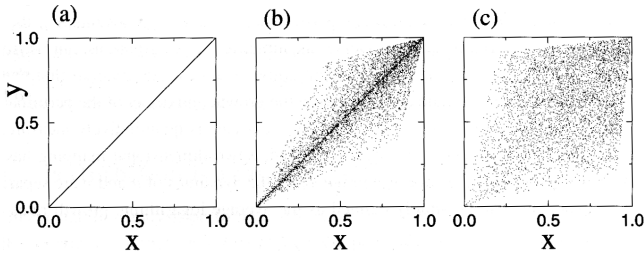


그림 6. $a = 0.7$ 인 두 개의 결합된 skew 텐트 본뜨기에서의 끌개 모습. 이 경우 임계 결합상수는 $\varepsilon_c \approx 0.228$ 이다. (a) $\varepsilon = 0.3$: 완전 동기화 상태. (b) $\varepsilon = 0.2$: 약한 비동기화 상태. (c) $\varepsilon = 0.1$: 완전한 비동기화 상태.

모든 시간 t 에서 항상 $x(t) = y(t)$ 인 완전 동기화가 이루어진다. 그러므로 $\varepsilon = 1/2$ 일 때 가장 강한 결합을 얻는다.

결합상수 ε 를 쌍갈림 파라미터로 생각하면 $0 < \varepsilon < 1/2$ 에서 비동기화 상태에서 완전 동기화 상태로 변화하는 쌍갈림이 일어나고 이런 쌍갈림이 일어나는 임계(critical) 결합상수를 ε_c 라고 하면 $\varepsilon_c < 1/2$ 가 된다. 즉 $\varepsilon > \varepsilon_c$ 일 때 $x = y$ 인 동기화가 가능해진다.

이제 skew 텐트 본뜨기를 이용해 완전 동기화에 대해 조사해 보자.

$$f(x) = \begin{cases} x/a & \text{if } 0 \leq x \leq a, \\ (1-x)/(1-a) & \text{if } a \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (11)$$

$a = 1/2$ 인 경우 위 식은 보통의 텐트 본뜨기가 된다. 그림 6에 동기화 및 비동기화 상태가 표시되어 있다. $a = 0.7$ 의 경우 임계 결합상수 $\varepsilon_c \approx 0.228$ 로 $\varepsilon_c < 1/2$ 을 만족한다. 그림 6(a)의 완전 동기화 상태에서 그림 6(b)의 약한 동기화 상태로 전이하는 것을 대칭 파괴(symmetry breaking) 또는 폭발(blowout) 쌍갈림이라고 부른다. 이유는 45° 경사선이던 끌개가 갑자기 폭발하듯이 크기가 커지기 때문이다.

동기화 전이가 일어나는 부근에서의 동역학을 자세히 분석하기 위하여 새로운 변수를 도입하자.

$$U = \frac{x+y}{2}, \quad V = \frac{x-y}{2} \quad (12)$$

완전 동기화에서는 $V = 0$ 가 되고 약한 비동기화의 경우 V 는 작은 값을 갖는다. 기하학적으로 U 의 방향은 $x = y$ 불변직선(invariant line)과 평행하고 V 는 불변직선에 수직하다. ε_c 근처의 약한 동기화의 경우 그림 7에서와 같이 V 는 간헐성(intermittent behavior)을 보인다. 드물지만 간헐적으로 나타나는 큰 진폭의 burst가 특징이며 이러한 특징을 on-off intermittency라고 부른다.

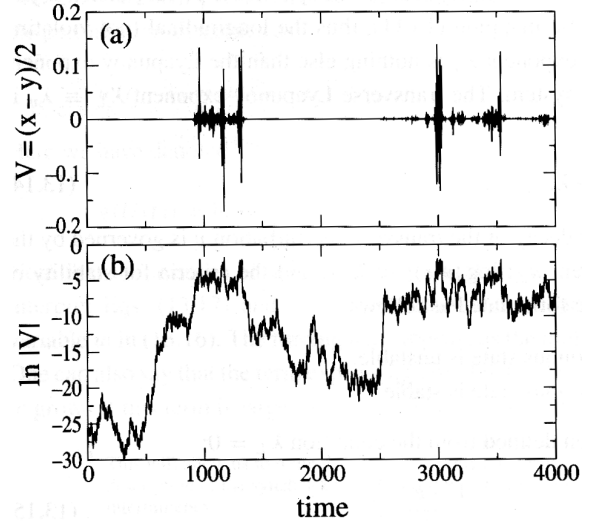


그림 7. $a = 0.7$ 인 결합 skew 텐트 본뜨기계에서의 on-off intermittency. 결합상수가 임계값보다 약간 작다. $\varepsilon = \varepsilon_c - 0.001$. (a) 두 변수의 차이 V 가 때때로 burst를 보인다. (b) V 의 로그 값이 무작위적 걸음(random walk) 형태의 행동을 보인다.

비동기화는 혼돈 동기화 끌개 $x = y$ 가 가로방향으로 불안정해지면서 생김을 위에서 알았다. 즉 V 의 불안정성이 생기는 것이 비동기화의 원인이 되므로 이 방향의 안정성 분석을 통하여 임계 결합상수 및 비동기화 메커니즘을 밝힐 수 있다. 식 9, 10을 변수 U, V 로 정리하면

$$U(t+1) = \frac{1}{2} [f(U(t) + V(t)) + f(U(t) - V(t))] \quad (13)$$

$$V(t+1) = \frac{1-2\varepsilon}{2} [f(U(t) + V(t)) - f(U(t) - V(t))] \quad (14)$$

을 얻는다. 완전 동기화된 혼돈 상태 $U(t), V = 0$ 에 대하여 이 식을 선형화하여 작은 섭동 u, v 에 대한 선형 본뜨기를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$u(t+1) = f'(U(t))u(t) \quad (15)$$

$$v(t+1) = (1-2\varepsilon)f'(U(t))v(t) \quad (16)$$

이 선형계를 동기화된 혼돈계의 운동방정식인

$$U(t+1) = f(U(t)) \quad (17)$$

와 함께 풀어주어야 한다. 섭동이 시간에 따라 지수함수적으로 증가하여 동기화가 깨어질 지, 아니면 지수함수적으로 감소하여 동기화가 유지될 지는 이 계의 리아푸노프 지수(Lyapunov exponent)를 계산하여 알 수 있다. 여기서 다루는 결합 혼돈 본뜨기계의 경우 u 와 v 가 분리

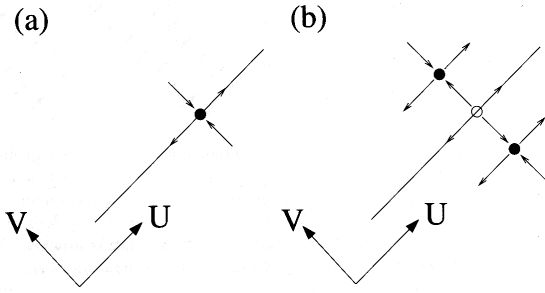


그림 8. 혼돈 끌개 상의 불안정 주기궤도의 고정점의 쌍갈림에 대한 설명. (a) $\epsilon > \epsilon_c(x^*)$: 이 고정점이 세로방향으로는 불안정하지만 가로방향으로는 안정해 혼돈 동기화가 유지된다. (b) $\epsilon < \epsilon_c(x^*)$: 이 고정점이 가로방향으로도 불안정해져 동기화가 깨어진다. 이 때 새로운 한 쌍의 고정점이 혼돈끌개 밖에 나타난다.

되어 있기 때문에 리아푸노프 지수를 다음과 같이 쉽게 정의할 수 있다.

$$\lambda_u = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln|u(t)| - \ln|u(0)|}{t} = \langle \ln|f'(U)| \rangle \quad (18)$$

$$\lambda_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln|v(t)| - \ln|v(0)|}{t} = \ln|1 - 2\epsilon| + \langle \ln|f'(U)| \rangle \quad (19)$$

여기서 $\langle \rangle$ 는 시간 평균값을 의미한다. 분리된 단일 본뜨기의 리아푸노프 지수를 λ 라 하면 결합 본뜨기계의 가로방향 리아푸노프 지수 $\lambda_{\perp} \equiv \lambda_v$ 는

$$\lambda_{\perp} = \ln|1 - 2\epsilon| + \lambda \quad (20)$$

로 주어지고 이 지수가 가로방향의 안정성을 결정한다. 즉 $\lambda_{\perp} > 0$ 이면 동기화 상태가 불안정해져 동기화가 깨지고, $\lambda_{\perp} < 0$ 이면 동기화 상태가 안정해져 동기화가 유지된다. 따라서 동기화의 임계값은 $\lambda_{\perp} = 0$ 에 의해 결정된다.

$$\ln|1 - 2\epsilon| = -\lambda, \quad \epsilon_c = \frac{1 - e^{-\lambda}}{2} \quad (21)$$

로지스틱 본뜨기의 경우 $\lambda = \log 2$ 이므로 $\epsilon_c = 1/4$ 를 얻는다. skew 텐트 본뜨기의 경우 동일한 계산을 거쳐 $\epsilon_c \approx 0.228$ 를 얻을 수 있다.

이제 완전 동기화로의 전이를 위상학적인 측면에서 살펴보고자 한다. 혼돈 끌개는 수많은 불안정 주기궤도(unstable periodic orbit, UPO)로 구성되어 있음이 잘 알려져 있다. 완전 동기화 상태의 끌개인 $x = y$ 불변직선 상의 각 UPO 고정점(fixed point) x^* 는 자신의 임계 결합상수 $\epsilon_c(x^*)$ 를 가지며 이 임계 결합상수는 식 21를 따른다. 즉

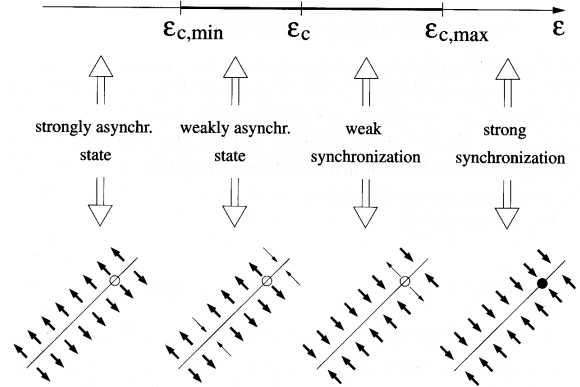


그림 9. 혼돈 동기화 전이의 쌍갈림 도표. 자세한 설명은 본문을 참조하라.

$$\epsilon_c(x^*) = \frac{1 - |f'(x^*)|^{-1}}{2} \quad (22)$$

를 만족한다. 그림 8에 혼돈 동기화 끌개 상의 한 UPO의 고정점이 가로방향의 쌍갈림을 하는 것이 표시되어 있다. $\epsilon > \epsilon_c(x^*)$ 일 때 이 고정점이 세로방향으로는 불안정하지만 가로방향으로는 안정하다. 그러나 $\epsilon < \epsilon_c(x^*)$ 일 때 가로방향으로도 불안정해져 새로운 한 쌍의 고정점이 불변직선 밖에 나타나 동기화가 깨어짐을 보여준다. 또한 다른 UPO에 대해 $\epsilon_c(x^*)$ 가 서로 다르기 때문에 UPO들이 가로방향으로 불안정해지는 쌍갈림 영역의 범위 ($\epsilon_{c,min}, \epsilon_{c,max}$)가 주어진다.

이 쌍갈림 영역의 범위에서의 특징을 정리한 것이 그림 9에 도식화되어 있다. 이를 좀더 설명하면 다음과 같다.

강한 동기화 영역 ($\epsilon > \epsilon_{c,max}$)

모든 UPO가 가로방향으로 안정하여 완전 혼돈 동기화가 이루어진다.

약한 동기화 영역 ($\epsilon_c < \epsilon < \epsilon_{c,max}$)

몇몇 UPO들이 가로방향으로 불안정해지지만 평균적으로 동기화 상태가 안정하다.

약한 비동기화 영역 ($\epsilon_{c,min} < \epsilon < \epsilon_c$)

평균적으로 동기화 상태가 불안정하다. 그러나 몇몇 UPO들은 여전히 가로방향으로 안정하다.

강한 비동기화 영역 ($\epsilon < \epsilon_{c,min}$)

모든 UPO가 가로방향으로 불안정하여 동기화가 완전히 깨진다.

마지막으로 동기화된 혼돈 끌개의 global한 특성이 동기화 전이에 미치는 영향에 대하여 알아보려고 한다. 동기화 상태의 불변직선인 혼돈끌개 밖에 또 다른 끌개 가 있을 경우 그림 10에서와 같이 약한 동기화 영역에서 또

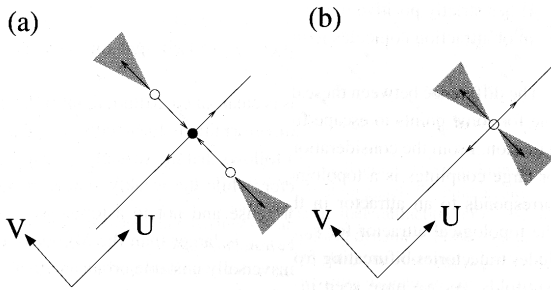


그림 10. 고정점의 subcritical 쌍갈림. (a) $\varepsilon > \varepsilon_{c,max}$ 에서 고정점이 안정하다. 진한 색의 영역은 멀리 있는 끌개로 끌린다. (b) subcritical 쌍갈림이 일어나는 $\varepsilon = \varepsilon_{c,max}$ 에서 멀리 있는 끌개의 basin of attraction이 불변직선과 닿는다. 진한 색의 영역은 이 그림에 표시되어 있지 않은 불변직선 상의 수많은 preimage들을 갖고 있다.

다른 끌개의 basin of attraction이 불변직선과 맞닿게 되어 불변직선 상의 고정점을 불안정하게 할 수 있다. 이 경우 한 고정점만이 불안정해지는 것으로 끝나지 않고 수많은 이 고정점의 preimage들까지 불안정해진다. 이런 과정을 통한 동기화의 전이를 riddling transition이라고 부르며 이럴 경우 계의 동기화가 잡음에 매우 약해진다. 아울러 이 경우 동기화는 일시적(transient)일 수 밖에 없고 시간이 지나면 모든 궤적이 불변직선으로 벗어나게 된다. 따라서 결합 혼돈계의 global한 특성이 동기화에 미치는 영향이 크다. 이 절에서 살펴본 내용은 지금까지의 혼돈 동기화에 대한 여러 연구 결과를 종합한 것이다 [6,8-18]. 로지스틱 본뜨기를 한쪽 방향에서 결합한 결합 혼돈계에 대하여도 동일한 특성이 발견되어 혼돈 동기화에 대한 보편성이 확립되었다 [19,20].

IV. 혼돈 동기화를 이용한 비밀통신

그림 11은 Cuomo와 Oppenheimer [21, 22]가 제안한 cascading drive-response synchronization을 이용한 비밀통신 방법의 개략도를 보여주고 있다. 이들은 로렌츠 혼돈계를 이용하여 비밀통신 회로를 제작하였다. 이들은 구동 로렌츠계의 x 신호에 작은 음성정보를 더하였다. 이 음성정보는 로렌츠계가 만드는 잡음과 같은 광대역의 혼돈 신호 속에 묻혀 숨어있게 된다. 음성정보 신호가 작을 경우 원래의 혼돈 신호와 구별할 수 없게 된다. 따라서 이 구동회로에서 만들어지는 혼돈 신호는 정보 신호를 숨겨주는 signal masking 구실을 하게 되어 도청의 위험을 막아주게 된다. 이제 이 변조된 신호를 멀리 떨어진 수신기로 보낸다. 수신기에서는 수신된 신호를 이용하여 수신기에 있는 반응계인 또 다른 로렌츠계를 동

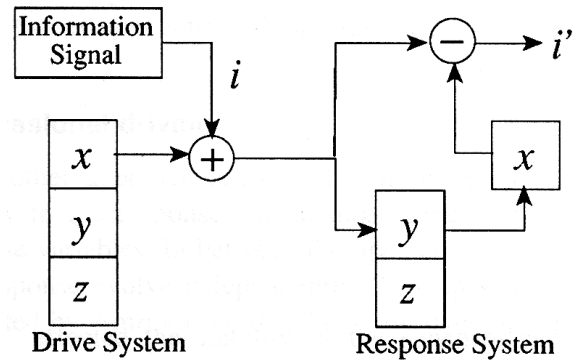


그림 11. Cuomo와 Oppenheimer가 제안한 혼돈 동기화를 이용한 비밀통신 방법의 개략도. 구동계의 혼돈 신호 x 에 정보신호를 같이 실어 수신기로 보내고 수신기에서는 혼돈 동기화를 이용해 혼돈 신호를 제거하여 원래 정보를 복원한다.

기화시킨 후 차이 $x - x'$ 을 구한다. 송신기와 수신기의 두 혼돈계가 완전 동기화되면 바로 신호 차이 $x - x'$ 가 송신기에서 실어보낸 음성정보가 된다. 이와 같이 혼돈을 이용한 encoding 방법은 깨기가 매우 어렵다. 현재 이 방법의 단점을 보완한 여러 변형 방법들이 제안되어 실용 가능성을 높이며 노력하고 있다.

V. 결 론

지금까지 혼돈계의 동기화에 대하여 살펴보았다. 과거 혼돈은 초기조건의 민감성을 가져 동기화가 어렵다고 생각했으나 외부 힘에 의한 혼돈계의 구동이나 한쪽 방향으로 혼돈계를 결합한 구동계-반응계 방법 등 다양한 방법에 의하여 혼돈 동기화가 가능함을 보았다. 또한 혼돈계의 경우 진폭과 위상이 일치하는 완전 동기화 이외에 위상은 일치하지만 진폭은 일치하지 않는 위상 동기화, 또는 일반 동기화가 가능함을 알았다. 특히 위상 동기화는 서로 다른 혼돈계의 동기화에서 발견되는 보편적인 특성으로 자연은 이 방법을 이용하여 계의 안정성을 확보하는 시너지 효과를 이용하고 있다. 예를 들어 최근 실험을 통하여 인체의 심장 박동과 호흡이 위상 동기화되어 있음이 확인되어 인체 기능에 중요한 역할을 담당함을 알 수 있다.

간단한 두 혼돈 본뜨기를 결합하여 혼돈 동기화의 메커니즘을 알아보았다. 혼돈 동기화는 각 혼돈계의 국소적 성질 뿐만 아니라 혼돈 끌개의 trapping 지역의 존재와 같은 global한 성질에도 크게 의존함을 알 수 있었다.

혼돈 동기화의 응용의 한 예로 비밀통신을 소개하였다. 혼돈 신호 속에 작은 정보신호를 실어 보내면 도청의 위험을 피할 수 있고 다시 혼돈 동기화를 이용해 정보신

호를 안전하게 추출해 낼 수 있다. 현재에도 혼돈 동기화에 대한 응용이 활발히 연구되고 있다.

감사의 글

본 논문을 작성하는데 강원대 물리학과 김상운 교수와의 공동연구가 큰 도움이 되었기에 감사드립니다.

참고 문헌

[1] E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.* **20**, 130 (1963).
 [2] 비선형 동역학 및 혼돈에 대한 일반적인 지식을 얻으려면 H. D. Schuster, *Deterministic Chaos: An Introduction*, VCH, Weinheim (1988), S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Addison-Wesley, Reading, MA (1994)를 참고하라.
 [3] L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 821 (1990).
 [4] L. M. Pecora, T. L. Carroll, G. A. Johnson, and D. J. Mar, *Chaos*, **7**, 520 (1997).
 [5] 최근에 간행된 동기화에 대한 참고서적으로 A. Pikovsky, M. Rosenblum and J. Kurths, *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge University Press, Cambridge (2001)를 들 수 있다.
 [6] H. Fujisaka and T. Yamada, *Progr. Theoret. Phys.*, **69**, 32 (1983).
 [7] 김영태, 주기운동 비선형계의 동기화 (새물리 2003년 2월호 게재예정).
 [8] T. Yamada and H. Fujisaka, *Prog. Theor. Phys.* **72**, 885 (1983).

[9] A. S. Pikovsky, *Z. Physik B* **55**, 149 (1984).
 [10] P. W. Hammer, N. Platt, S. M. Hammer, J. F. Heagy, and B. D. Lee, *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 1095 (1994).
 [11] H. L. Yang and E. J. Ding, *Phys. Rev. E* **54**, 1361 (1996).
 [12] S. Miyzaki and H. Hata, *Phys. Rev. E* **58**, 7172 (1998).
 [13] H. Nakao, *Phys. Rev. E* **58**, 1591 (1998).
 [14] A. S. Pikovsky and U. Feudel, *Chaos* **5**, 253 (1991).
 [15] P. Ashwin, J. Buescu, and I. Stewart, *Phys. Lett. A* **193**, 126 (1994).
 [16] Y. Maistrenko and T. Kapitaniak, *Phys. Rev. E* **54**, 3285 (1996).
 [17] M. Mansher, M. Nordham, E. Mosekilda, and Yu. L. Maistrenko, *Phys. Lett. A* **238**, 358 (1998).
 [18] V. Astakhov, T. Kapitaniak, A. Shabunin, and V. Anischenko, *Phys. Lett. A* **258**, 99 (1999).
 [19] S.-Y. Kim, W. Lim, and Y. Kim, *Prog. Theor. Phys.*, **105**, 187 (2001).
 [20] S.-Y. Kim, W. Lim, and Y. Kim, *Prog. Theor. Phys.*, **107**, 239 (2002).
 [21] K. Cuomo and A. V. Oppenheimer, *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 65 (1993).
 [22] K. Cuomo and A. V. Oppenheimer, and S. H. Strogatz, *IEEE Trans. Circuits Sys.*, **40**, 626 (1993).
 [23] G. Perez and H. A. Cerderia, *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 1970 (1995).
 [24] K. M. Short, *Int. J. Bifurcations Chaos*, **4**, 959 (1994).
 [25] H. D. I. Abarbanel, N. F. Rulkov, and M. M. Sushchik, *Phys. Rev. E* **53**, 4528 (1996).
 [26] A. Goryachev and R. Kapral, *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 1619 (1996).
 [27] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Europhys. Lett.*, **34**, 165 (1996).
 [28] L. Kocarev and U. Parlitz, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1816 (1996).

Chaotic Synchronization

Youngtae KIM

Department of Molecular Science and Technology, Ajou University, Suwon 442-749

(Received 8 January 2003)

After the discovery of chaotic synchronization and proposal of its technical applications, recently the study of the chaotic synchronization has grown considerably. The purpose of this paper is to review the fundamental properties and coupling methods of synchronization in chaotic systems. The mechanisms of the chaotic synchronization and desynchronization are derived using stability analysis with nonlinear dynamics theory as well. Various bifurcations occurring during desynchronization are also presented. Finally secure communication schemes are discussed as an application of chaotic synchronization.

PACS numbers: 05.45, 05.45.G, 05.45.V

Keywords: Nonlinear dynamics, Chaos, Synchronization, Coupled dynamical system