Journal of Historia Mathematica Vol. 8. No. 1, (1995), 6 - 13.

20세기 수리논리학의 사상과 흐름

연세대학교 金相文 玄宇植

1. 서 언 : 수학기초론과 수리논리학

20세기에 들어오면서 수학의 제반 내용들의 해석이 아닌 수학 자체의 구조적 건실성을 확립하기 위한 소위 수학기초론의 문제가 본격적으로 제기되면서 수리논리학은 집합론과 더불어 수학기초론의 중요한 방법론이자 자체의 연구 대상을 갖는 독립된 학문으로 등장하게 되었다. 논리학사상 이 시기는 C. S. Peirce (1839-1914)의 최초의 양화사 quantifier 기호의 도입, E. Schröder (1841-1902)의 양화사에 대한 대수적 해석과 명제적 해석을 통한 술어계산predicate calculus의 전개, 그리고 F. L. G. Frege (1848-1925)의 수학 기반이 되는 논리 체계 건설을 위한 공리화 axiomatization 작업등이 진행되어 술어논리 Predicate logic가 성립되던 시기였다. Frege는 광범위한 수학적 정리들의 증명에 논리를 사용하였고 동시대의 G. Peano (1858-1932)는 최초로 자연수의 산술에 대한 공리체계 axiomatic system를 제공하며 수학 내의 여러 정리들에 대한 논리적 증명을 시도하였다.[1)]

한편 고전수학과 현대수학의 분기점이 되는 현대의 집합론이 무한의 문제를 직접 다루고자 했던 G. Cantor (1845-1918)에 의해 시작되어 수학에 근본적이고 구조적 변화를 가져오게 되었으나 Burali Forti 의 패러독스(1897),[2)] Cantor의 패러독스(1899),[3)] Russell

1) E. W. Beth, The Foundations of Mathematics (1968), pp. 67-69., I. M. Bochenski, *A History of Formal Logic*, pp. 226-272 (1961), A. Grzegorczyk, An Outline of Mathematical Logic (1974), pp. 571-574.
2) 서수 ordinals에서의 $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta < \alpha$ 문제
3) $|M| < 2^{|M|}$ 와 $2^{|M|} \leq |M|$ 의 문제

(1972-1970)의 패러독스[4](1903)등 중대한 패러독스들이 발생하면서 집합론은 물론 수학 전체의 기반이 위협받는 상황에 도달하였다. 이 시기에 역설을 해결하고 수학의 기초를 확립하기 위한 연구들이 본격화되었으며 수학의 본질에 대한 물음이 심각하게 제기되었다. 이 글의 목적은 이러한 시대적 배경에서 시작되는 20세기 수리논리학의 성립 과정과 그 체계들에 대한 고찰을 통해 수리논리의 사상과 그 전개 양상을 분석하고 앞으로의 논리학의 과제와 방향을 전망하기 위한 것에 있다.

2. Frege에서 Gödel까지의 수리논리학

2. 1. Frege, Russell과 논리주의(Logicism)

F. L. G. Frege는 Begriffsschrift (1879)를 통해 순수한 사고의 표현을 위한 형식언어로서의 논리학의 새로운 체계를 제공하였다. 그의 생각은 기본적 논리분석으로 수학 내의 증명들의 논리적 구조를 밝혀 낼 수 있으리라는 것이었다. 이를 위해 술어를 명제함수로 보았고 양화사들을 명제논리적 관점에서 해석하여 형식논리formal logic의 체계를 구성하고 산술의 정리들은 논리의 법칙으로부터 도출 가능함을 보여 주었다. 「산술체계의 기초」 Die Grundlagen der Arithmetik (1884)에서는 산술을 논리에 환원시키는 작업을 보여 주었고 이 환원의 신뢰성을 위해 적절한 형식논리의 체계가 필요하다고 지적하여 「산술의 기초 원칙」 Grundgesetze der Arithmetik (1893-1903)에서는 그러한 자신의 계획을 실현시켜 보였다.

B.Russell은 「수학의 원칙」Principles of Mathematics (1903)에서 Frege의 계획과 Peano의 작업을 결합시켜 산술체계와 수학의 모든 분야들도 논리에 환원될 수 있다고 보고 그러한 형식논리의 법칙을 연구하였다. 그래서 Cantor의 집합론의 기초를 위협하는 소위 러셀의 패러독스를 발견하고 (1903) 이 모순을 세분화유형론 ramified type theory을 통해 해결하고자 하였다 (Theory of Type ,1908). 이후 그는 A. N. Whitehead와의 공저 「수학원론」 Principia Mathematica (1910-1913)에서는 명제논리체계내에서 세분화유형론을 사용하여 논리로부터 수학이 연역 가능함을 보이고자 하였다. E. L. Post는 수학원론의 명제논리학 체계의 모순성과 완전성을 증명하고 이를 일반화시켰다 ("Introduction to a general theory of elementary propositions, 1921)[5]. 그러나 이러한 논리주의는 Russell이 무한공리 infinity axiom, 연장공리 extensionality axiom, 환원공리 reducibility axiom를 추가로 채용함으로써 이미 그 한계를 내재하고 있었다.

2. 2. Brouwer와 직관주의(Intuitionism)

L. Couturat는 위의 논리주의에 입각해서 칸트의 수리철학에 비판을 가하였다 (Les principes des mathématiques 1905). 이에 대하여 H. Poincaré는 논리 법칙으로부터 수학을 연역해 낼 수 없음을 강조하며 논리주의에 대한 반박을 함으로써 논쟁이 시작되었다 (Science et méthode 1908, Derniéres pensées 1913). L. E. J. Brouwer (1881-1966)는 박사학위논문 "수학의 기초에 관하여 (Over de grondslagen der wiskunde, 1907)"에서 Russell이 수학을 논리에 환원시킨 것에 반대하였고 또한 Cantor의 naive set theory에 대한 Hilbert의 공리화나 Zermelo의 해석에 대해

---

4) $R = \{ x \mid x \neq x \}$, $R \in R$ *iff* $R \notin R$

5) J. van Heijenoort (ed), *From Frege to Gödel*, pp. 265-283.

서도 반대하여 형식주의 Formalism와의 유명한 논쟁이 진행되었다. 그는 패러독스로부터의 자유에서 수학의 존재성을 확보하려 했던 Poincaré의 입장에서 더 나아가 논리와 수학의 무관성을 주장하였다. 이는 L. Kronecker의 구성주의 영향과 수학의 근거와 본질은 직관에 있다는 생각에서 비롯된 것이었다. 1908년 "논리법칙의 비신뢰성 (De onbetrouwbaarheit der logische principes)"을 통하여는 무한집합에 배중률 (law of the excluded middle)을 적용하는 것이 유한집합으로부터의 부당한 확장이라고 보고 이를 근거로 수학적 추론에서의 무제한적 배중률 적용에 반대하였다. 이러한 입장에서 집합론 (1918), 함수론 (1923)을 재구성하여 오늘날 수학의 구조주의 학파에도 적지 않은 영향을 준 것으로 평가된다. 논리주의가 패러독스의 문제 해결을 시도하였다면 직관주의는 패러독스의 포기와 내용의 재구성을 통한 문제 해소를 선택한 것이다.

H. Weyl은 직관주의 입장에 서 있었으나 실수체계론 (연속체)을 통한 해석학적 완성을 위해 자연수에 관한 Peano의 산술체계를 수용하였기 때문에 반직관주의에 속한다.[6] 배중률의 문제를 중심으로한 Hilbert의 형식주의와 Brouwer의 직관주의의 10여년에 걸친 논쟁은 바로 Hilbert의 제자였다가 직관주의에 동조했던 Weyl에 의해 유한성과 배중률의 제한의 결합과 양대 학파의 두 거장이 부분적인 상호 인정을 수용함으로 막을 내렸다 (1927).

2. 3. Hilbert와 형식주의 (Formalism)

D. Hilbert (1862-1943)의 증명론 Beweistheorie 혹은 메타수학 Metamathematics은 1904년에서 1928년 동안 발전된 개념이었다. 1900년에 들어와 기하학의 기초를 형식화하는 것에서 모든 수학을 위한 정리 theorems와 공리 axioms의 형식화 formalization로 관심을 돌린 그에게 형식체계 자체의 완전성 completeness 문제는 사실상 그 형식체계를 넘어서는 성격의 문제였다. 그는 이 문제를 해결하기 위해서는 논리학과 관련하여 수학의 형식화와 무모순성 consistency에 대한 증명론이 필요하다고 보았다. 유한적 형식과 유한적 절차에 의한 유한적 finitistic 방법으로 형식체계의 무모순성을 확립하는 것이 증명론의 과제였으며 이러한 증명론을 수립하기 위해서는 형식체계에서 나타나는 표현들로부터 철저히 독립적이고 형식적인 방법으로 진행되어야 했다. 왜냐하면 증명론은 형식체계 상위 혹은 외부에 위치하여 탈의존성이 보장된 메타수학에 속하는 문제이기 때문이다.

1901년 Göttingen 수학회에서 행한 완전성과 결정가능성에 관한 강연에서 Hilbert는 논리학의 범위가 집합론을 포함하고 있으며 각각의 명제들은 형식체계 내에서 공리에 의해 결정되어야 한다고 주장하였다. Hilbert 프로그램이란 바로 형식체계의 무모순성 consistency, 결정가능성 decidability, 그리고 완전성 completeness을 입증하는 것이었다. Hilbert와 Ackermann (1896-1962)은 기본적 술어논리, 즉 1계논리의 무모순성을 증명하였고 (Grundzüge der theoretischen Logik 1928), 그해 볼로냐에서의 "Problem der Grundlagung der Mathematik" 연설을 통해 지난 10여년동안 W. Ackermann, J. von Neumann 등과 함께 이룬 유한적 무모순성 증명에 관한 결과를 소개하며 다음의 미해결 문제 4가지를 제시하였다.[7]

문제1) 해석학의 기본 부분에 관한 유한적 무모순성 증명,

문제2) 고계함수계산에 대한 증명의 확장문제,

6) Weyl의 반직관주의에 관한 자세한 내용은 김상문, 「수학기초론」, pp. 22-27을 참조하라

7) H. Wang, "Gödel's and Some Other Examples of Problem Transmutation," pp. 103-104

문제3) 수론과 해석학에 대한 공리체계의 완전성문제,

문제4) 1계논리 First-order logic의 완전성 문제.

1계논리의 완전성 문제는 Gödel(1906-1978)에 의해 해결되었으나 (1930) 또한 그의 불완전성 정리에 의해 Hilbert 원대한 계획은 좌절되고 만다. 그러나 그것이 모두에게 영원한 좌절을 의미하는 것은 아닐 수도 있다. 가령 '상대적 무모순성 증명 relative consistency proof'의 타당성은 여전히 유효하며 또한 메타수학을 보충할 만한 직관적 성격의 증명론을 수용함으로써 (D. Hilbert & P. Bernays, Grundlagen der Mathematik I, 1934 서문) 극복 가능할 지도 모른다. 특히 형식주의 학파의 일원이었던 G. Gentzen (1909-1945)이 Hilbert의 증명이론의 제한조건을 완화하여 구성적 성격의 초한귀납법 transfinite mathematical induction으로 자연수론의 무모순성을 증명함으로 1계논리의 무모순성을 증명한 것에 주목할 필요가 있다(Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, 1936). Hilbert 계획의 부분적 실현에 관한 연구는 오늘날까지 계속되고 있다.[8)]

3. Gödel 이후 수리논리학의 전환

3. 1. Gödel의 불완전성 정리(Incompleteness Theorems)와 한계 정리 (Limitative Theorems)

K. Gödel은 1930년 비엔나 대학의 박사학위 논문 "논리계산의 완전성에 관하여 Über die Vollständigkeit des Logikkalküls"[9)]에서 1계논리의 완전성을 증명함으로 Hilbert가 제기한 미해결문제 중 네번째의 문제를 해결하였다. 그리고 유한적 수론 number theory에 의한 수론의 무모순성 증명과 수론에 의한 해석학 analysis의 무모순성 증명을 구분해서 다루어야 한다고 보고 수론에 대한 해석학의 상대적 무모순성 the relative consistency을 다루었고 그 결과 유형론 또는 집합론을 포함하는 자연수론 내에서 결정할 수 없는 명제가 존재함을 형식화하여 자연수론의 진위 문제를 수론 내에서 결정할 수 없음을 증명하였다. Gödel의 제1 불완전성 정리로 불리는 이 정리는 확장된 Peano Arithmetic체계에 해당하는 어떠한 형식체계가 오메가 무모순 ω*-inconsistent*이면 결정불가능한 명제가 존재한다는 것을 증명한 것이다 ("수학원론과 관련체계들의 형식적 결정불가능 명제에 관하여" Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, 1931).[10)] 결국 그는 Hilbert가 제시한 4가지의 미해결 문제에 대해서 부정(1,2,3)과 긍정(4)으로 모두 해답을 제시하였고, 이것은 순수하게 유한적 방법에 기초한 메타수학과 공리체계를 완성하고자 했던 Hilbert의 계획이 Gödel의 불완전성 정리(1931)에 의해 좌절됨을 의미하였다. 20세기 수리논리학의 이상이었던 논리 환원 가능성과 형식체계의 완전성, 그리고 모든 정리의 결정가능성이 무너짐을 의미하는 대사건이었다. 불완전성정리의 일반화 작업은 J. B. Rosser에 의한 무모순성 조건의 확장으로 시작되어 ("Extensions of Some Theorems of

8) 주목할 만한 논문으로는 M. Detlefson,"On Interpreting Gödel's Second Theorem," *Journal of Philosophical Logic* 8, pp. 297-313.을 참조하라. 자세한 내용은 김상문 「수학기초론」, pp. 37-43.을 참조할 것

9) 학위논문의 개정본은 "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls" (1930), in *From Frege to Gödel*, pp.582-591.

10) J. van Heijenoort (ed) *From Frege to Gödel*, pp. 596-617.

Gödel and Church", 1936), L. Henkin의 1952년 증명가능성에 대한 자기증명가능성의 문제 제기와 이에 대한 1955년 M.H.Löb의 해결로 Löb의 정리는 Gödel의 제2불완전성 정리와 동치로 받아들여 지게 되었다.

형식논리의 한계를 제시하는 작업들로는 "유한적 유효절차 effective finite procedure" 즉 결정절차 decision procedure가 존재하지 않음을 증명하여 1계논리의 결정가능성문제 Entscheidunsproblem는 해결불가능 unsolvable하다는 것을 보여준 A. Church(1936)의 정리와[11] 자연수를 카테고리적으로categorically[12] 표현할 수 있는 무모순의 형식체계는 존재할 수 없음을 보인 Th.Skolem의 정리(Skolem,"수학적 명제의 증명가능성과 충족성에 대한 논리-조합론적 고찰" Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze, 1920)[13]가 있으며 A.Tarski는 진리치의 정의불가능성을 증명하여 의미론적 한계를 보여주기도 하였다.("Der Wahrheitbegriff in den formalisierten Sprachen", 1936)

Gödel의 불완전성 정리 이후 수리논리의 주요 관심은 메타수학의 문제로 집중되었다. 그 중 하나의 흐름은 수학적 개념들을 구성하는 논리적 방법론에 관한 연구로써 계산가능성 computability 문제와 결정불가능성 undecidability에 관한 문제를 다루었고, 다른 흐름은 공리체계의 모델에 관한 연구였다.[14]

3. 2. 계산가능성 이론 (Computability Theory)

J. Herbrand(1908-1931)와 Gödel에 의해 제기된 계산가능성 문제는 Gödel가 정의한 원회귀함수Primitive Recursive Function로부터 확장된 Herbrand-Gödel-Kleene 체계에서 정의된 일반회귀함수General Recursive Function로 발전되었다(1936).[15] Church Thesis에 의해서 "유효적 effective" 이라는 심리학적 개념이 "회귀적 recursive"이라는 수학적 개념과 연결되어,[16] 유효적 계산가능성은 회귀적recursive임이 증명되었다(1936). 한편 A. Turing은 Turing Machine에 의한 계산가능성을 정의하고 이것이 곧 유효적 계산가능성과 동치임을 주장하였다(1936).[17] 그리고 회귀함수와 튜링계산함수의 동치성이 증명되었다. 그래서 계산가능성은 회귀함수(Church)와 튜링기계(Turing)에 의해 정의되었고 두 사람의 정립 Thesis은 동치로 인정되고 있다. 또 다른 형식체계인 Turing Machine 추상모델이Herbrand-Gödel-Kleene체계와 동치임이 증명된 것이다. 이처럼 증명가능성의 문제는

11) A. Church, "An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory," "A Note on the Entscheidungsproblem," in M. Davis(ed) *The Undecidable* (New York : Raven Press, 1965), pp.89-107, pp.110-115.

12) 카테고리적Categorical 이란 그 형식체계의 모든 모델이 동형적isomorphic임을 의미한다.

13) 1장의 영역은 *From Frege to Gödel*, pp.252-263.참조

14) A.Grzegorczyk, *An Outline of Mathematical Logic*, pp.577-578. M.Kline은 이후에 남겨진 두 가지의 주요한 미해결 문제로 (1) 비제한적 해석학과 집합론의 무모순성증명과 (2) 엄격한 직관주의적 기초에 근거한 수학의 건설이나 제한의 결정을 제시하고 있다. M.Kline, *Mathematical Thought vol.3*, p.1209.

15) S. C. Kleene, "General Recursive Functions of Natural Numbers", *The Undecidable*. pp. 236-253.

16) H. Delong, *A Profile of Mathematical Logic*, pp.193-195.

17) A. Turing, "On Computable Numbers, with an Application to the Endscheidungsproblem," *The Undecidable*, pp.116-151.

계산가능성의 문제와 관련하여, 수리논리가 분석적 도구, 지식표현의 형식체계, 추론의 방법, 그리고 LISP (J. McCarthy, Recursive Functions of Symbolic Expressions and their Computation by Machine, 1960)나 PROLOG 등 컴퓨터 언어의 기초로써 오늘날 컴퓨터과 학과 인공지능의 발전에 지대한 공헌을 하게 되었다.

3. 3. 모델이론(Model Theory)

모델이론에 관한 연구는 Skolem, Löwenheim, Gödel에 의해 기원되었다고 볼 수 있으며 정리의 충족성 satisfaction과 1계 논리의 완전성 completeness이 그 주된 주제였다. 이러한 연구 흐름은 계산가능성의 문제와는 역방향으로 이미 증명된 정리에 의해 설명될 수 있는 수학적 영역을 찾는 것에 목적이 있었다. 그러므로 모델이론의 관심은 제한된 범위를 넘어서 정리들을 충족시킬 수 있는 영역의 확보와 확장에 있다. 기존의 논리체계에 새로운 차원과 새로운 도구를 추가하는 문제들이 다루어졌는데, completeness문제, compactness 문제, Mostowski의 양화사 일반화 문제 (On a generalization of quantifiers, 1957), 2계논리의 모델문제, Lindström의 characterization 정리 (On extensions of elementary logic 1969), Interpolation 정리와 *Δ−closure* 문제, Hanf numbers의 문제등의 연구를 통해 발전되어 왔다.[18] 집합론의 모델이론과 관련하여 집합의 크기를 제한한 ZF (Zermelo-Fraenkel)계와 형식적 확장을 수용한 VBG (Von Neumann-Bernays-Gödel)계의 여러 모델이론적 전개가 있으며 H. Wang은 두 체계의 동치성을 증명하였다 ("On Zermelo's and von Neumann's Axioms for Set Theory," 1949). 특히 Gödel의 선택공리와 일반연속체가설이 추가된 ZF계의 무모순성 증명 ("The Consistency of the Axioms of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis," 1938)과 P. Cohen의 선택공리의 부정과 일반연속체가설의 부정이 추가된 ZF계의 무모순성 증명을 통해 선택공리와 일반연속체가설은 ZF계와 독립적이라는 것을 증명하였다("The Independence of the Continuum Hypothesis," 1963). 이로써 현대 수학의 기본적 체계인 ZF계가 적어도 두 가지 공리에 관한 한 제약을 받지 않게 되었고 또한 두 공리로부터 자유로운 ZF모델의 연장 문제에 관한 여러 연구들이 계속되고 있다.

4. 비표준논리학(Non-standard Logic)과 인공지능(AI : Artificial Intelligence)

고전논리학classical logic이 명제논리학 propositional logic을 의미하고 현대논리학이 술어논리학 predicate logic 을 의미한다고 할 때, 두 논리학은 표준논리학 standard logic을 이루고 그 외의 논리학들은 비표준논리학의 범주에 포함된다. 비표준논리학은 표준논리학의 연장에 속하는 양상논리 Modal logic, 시제논리 Tense logic와 표준논리학의 대안에 속하는 다치논리 Multi-valued logic, 퍼지논리 Fuzzy logic 등으로 분류된다.[19]

필연성 necessity개념과 가능성 possibility 개념을 다루는 양상논리학은 그 유래가 Aristotle에서 부터 시작되지만 현대의 양상논

18) J. Barwise, "Model-Theoretic Logics : Backgrounds and Aims," J. Barwise and S.Feferman (eds), *Model-Theoretic Logics*, (New York:Springer Verlag,1985), pp. 3-23.

19) R. Turner, *Logics for Artificial Intelligence* (Chichester : Ellis Horwood Limited, 1984), pp.11-17.

리의 성립은 C. I. Lewis (A Survey of Symbolic Logic, 1918)에 의해 시작되었고, 특별히 Provability logic을 양상논리에서 소화하고 양상논리의 완전성을 증명한 S. Kripke("A Completeness Theorem in Modal Logic, "1959)에 의해 발전되었다. R. C. Moore는 양상논리를 AI에 효과적으로 도입하여 발전시켰다(1984). 시간성 요소에 의한 추론을 시도한 시제논리는 의미론적 접근의 W. V. O. Quine (Word and object, 1960)과 시제연산을 통한 구문론적 접근의 A. N. Prior (Time and Modality, 1957)에 의해 형성되었고 J. F. Allen (1981)와 D. McDermott (1982)등에 의해 시제논리가 AI에 도입되었다.

다치논리는 E. Post의 m-valued logic(1921)와 특히 3치논리체계에서의 J. Luckasiewicz (On 3-valued logic, 1920), D. Bochvar(On three-valued logic and its application to the analysis of contradictions, 1939), 그리고 S. Kleene(Introductions of Metamathematics, 1952)의 세 가지 체계를 통해 전개되어 왔다. L. A.Zadeh에 의해 형성된 퍼지논리는 2치논리의 한계를 극복하고자 진리치의 퍼지화, 연산의 퍼지화를 통해 논리의 대상에서 제외되었던 많은 문제들을 효과적으로 처리하여 주목받고 있다(Fuzzy logic and its application to approximate reasoning,1974).

위에서 언급한 논리학들 외에 Many-sorted logic, Weak second-order logic, Infinitary logic등이 주요한 연구 주제들이며 고계논리 higher-order logic를 위한 정리증명의 전산화나 AI의 믿음, 지식표현을 다루기 위한 비단조논리 Nonmonotonic logic와 관련하여[20] Default 논리[21], 자기인식논리 Autoepistemic logic[22], 한정논리 Circumscription logic[23]가 있고, 상식 common sense의 표현을 다루는 정황논리 Context logic[24]등이 활발히 연구 중에 있다.

20) $S \subseteq S^* \wedge \exists F(S \vdash F \wedge S^* \nvdash F)$

5. 결 어: 수리논리학의 과제

인간의 사고가 계속되는 한 논리학의 완성이란 불가능하며 새로운 과제는 지속적으로 생성될 것이다. 20세기 수리논리학의 역사는 그러한 끊임없는 논리적 발전과 과제의 생성을 보여 주고 있다. 초기에는 집합론의 역설을 해결하기 위해서 수학의 내용과 방법론에 관한 근원적 질문이 제기되었으며 관점과 방법론에 따라 논리주의, 직관주의, 형식주의, 반직관주의의 사상적 흐름을 형성하였다. 공리화를 통하여 유한적 증명론(메타수학)에 의해 수학과 수리논리의 기초를 세우고자 했던 논리주의와 형식주의적 시도들은 Gödel의 불완전성 정리에 의해 그 한계가 증명되었으며 이는 논리적 방법의 한계에 대한 수리논리적 증명을 함의하는 것이었다. 형식적 진리치와 내용적 진리치의 불일치를 보여 확장된 형식논리체계에 불완전성이 있음을 보여 주었기 때문이다. 이후 수리논리학이 얼마나 효율적으로 응용가능하며, 얼마나 타당한 영역을 확보할

21) R. Reiter, "A Logic for Default Reasonin," *Artificial Intelligence* 13 (1980), pp.81-132.

22) B. Moore, "Semantical considerations on nonmonotonic logic", in *Proceedings of Eighth International Joint Conference on Artificial Intelligence* (1983), pp.272-279.

23) J. McCarthy, "Circumscription- a form of non-monotonic reasoning", *Artificial Intelligence* 13 (1980), pp.27-39. "Applications of circumscription in formalizing common sense knowledge" *Artificial Intelligence* 28 (1986), pp.89-116.

24) J. McCarthy, "Notes on formalizing context", in *Proceedings of the Thirteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (1993)*

수 있는가의 문제로 관심의 방향이 전환되어 오늘날 수리논리학은 집합론, 계산가능성이론(회귀이론), 증명론, 모델이론으로 구성되어 계속 발전 중에 있다.[25] 연속체가설 Continuum Hypothesis의 진리치 truth value 문제, 강제 forcing와 생성필터 generic filter의 문제, 무한 기수 이론의 술어적 방법의 문제, 정규족 normal classes의 연장 문제, 증명론 proof theory의 동치성 문제, 반사적 reflexive 패러독스문제, 고계논리 정리증명의 전산화 문제 등은 아직 완전히 해결되지 않은 문제들이다.

20세기는 논리 역사상 비약적인 발전과 여러 훌륭한 결과들이 나타났던 시기였다. 그리고 가장 위대한 업적 가운데 하나는 논리의 한계를 증명한 것이었다. 수리논리학의 과제는 바로 그러한 논리의 한계를 넘어서는 논리의 추구와 그 성립에 있다.

참고문헌

1. Barwise, J & Feferman, S. (ed) Model-Theoretic Logics (New York : Springer- Verlag, 1985)
2. Barwise, J. (eds) The Handbook of Mathematical Logic (Amsterdam : North-Holland Pub. Com., 1977)
3. Beth, E. W. The Foundations of Mathematics (Amsterdam : North-Holland Pub. Com., 1968)
4. Bochenski, I. M. A History of Formal Logic (Notre Dame : University of Notre Dame Press, 1961)
5. Davis, M. (ed) The Undecidable (New York : Raven Press, 1965)
6. Delong, H., A Profile of Mathematical Logic (Mass. : Addison-Wesley Pub. Com., 1970)
7. Grzegorczyk, A. An Outline of Mathematical Logic (Dordrecht : D. Reidel Pub. Com., 1974)
8. Kline, M., Mathematical Thought Vol.3 (New York : Oxford University Press, 1972)
9. Turner, R. Logics For Artificial Intelligence (Chichester : Ellis Horwood Limited, 1984)
10. van Heijenoort, J. (eds) From Frege To Gödel (Mass. : Harvard University Press, 1967)
11. 김상문, 「수학기초론」(서울:민음사, 1989)

25) 각 분야의 주요 주제에 관하여는 J.Barwise (ed), Handbook of Mathematical Logic을 참조하라